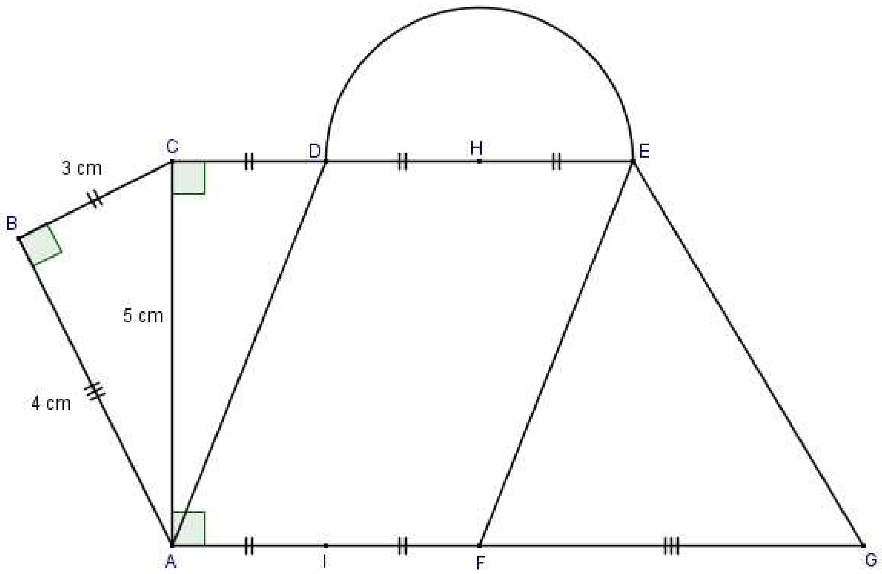
Exercice 1 :

Calculer l'aire de la figure ci-dessous sachant que ADEF est un parallélogramme.



Exercice 2 :

On considère trois cercles de rayon respectif 1 cm, 2 cm et 3 cm.

1) Calculer la valeur exacte puis la valeur approchée de chacun de ces disques. On arrondira les résultats au cm^2.
2) Calculer la valeur exacte du périmètre de chacun de ces cercles.
3) Si on double le rayon d'un cercle, par combien son aire est-elle multipliée ?
4) Si on double le rayon d'un cercle, par combien son périmètre est-il multiplié ?

Exercice 3 :

Un verre à la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 10 cm et de diamètre 6 cm.

1) Calculer la valeur exacte de son aire latérale.
2) Calculer la valeur exacte de son volume V.
3) On verse dans ce verre 25 cL d'eau. Calculer la valeur exacte de la hauteur h d'eau puis arrondir au cm près.

Exercice 4 :

Construire le patron d'un cylindre de 5 cm de hauteur et dont le rayon de la base a pour longueur 2 cm.

Exercice 5 :

Une boite a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 10 cm. On désigne par r le rayon de sa base.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

r en cm	4	8	16
Volume en cm^3 (Valeur exacte)			

Le volume de la boite est-il proportionnelle au rayon de la boite ?

2) Compléter le tableau ci-dessous :

r en cm	4	8	16
Aire latérale en cm^3 (Valeur exacte)			

L'aire latérale est-elle proportionnelle au rayon de la boite ?

Problème 1 :

On verse $\frac{3}{4}$ L d'eau dans une casserole cylindrique de 12 cm de diamètre et de 7 cm de hauteur.

L'eau va-t-elle déborder la casserole ?

Problème 2 :

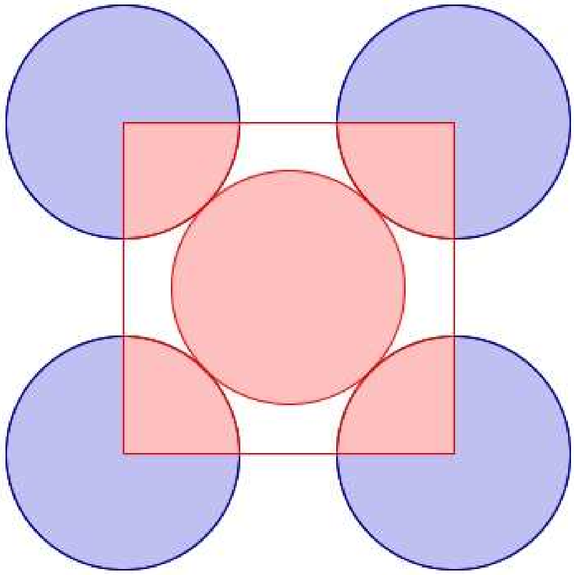
Le volume en cm^3 d'un cylindre de révolution est égal au double de son aire latérale en cm^2.
Déterminer le rayon de ce cylindre.

Problème 3 :

On remplir d'eau une éprouvette de forme cylindrique de 3 cm de rayon. On ajoute un caillou. Le niveau de l'eau monte alors de 20 mm.
Déterminer le volume du caillou.

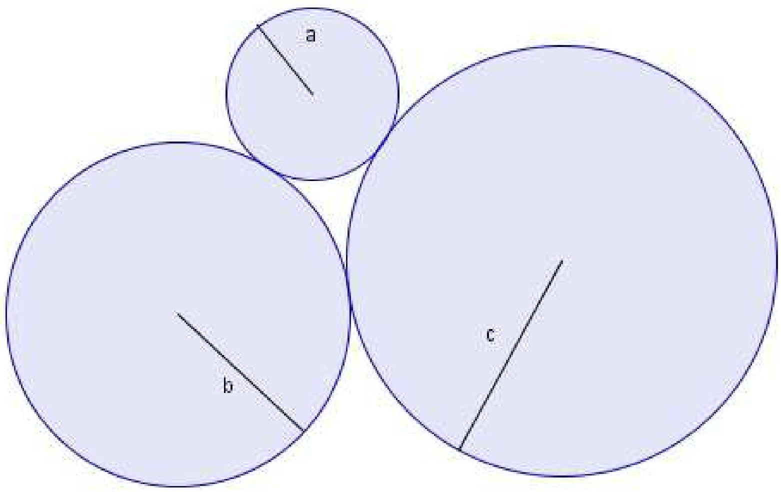
Problème 4 : (Kangourou des collèges 2005)

Sur la figure ci-après, cinq cercles de même rayon se touchent. On a tracé le carré dont les sommets sont les centres des quatre cercles extérieurs. Quel est le quotient $\dfrac{\text{aire rouge}}{\text{aire bleue}}$?

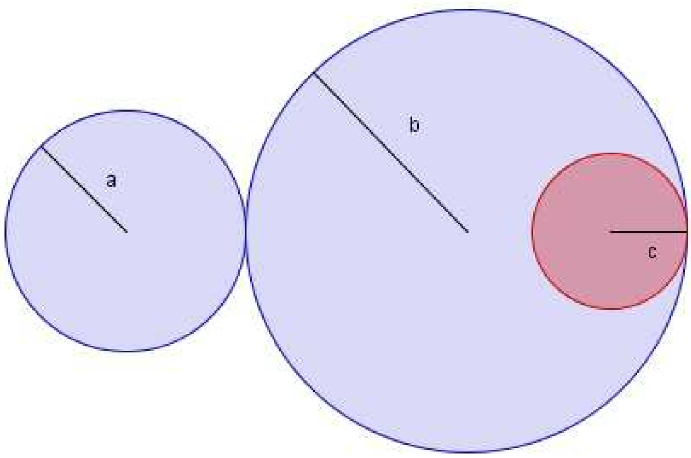


Problème 5 :

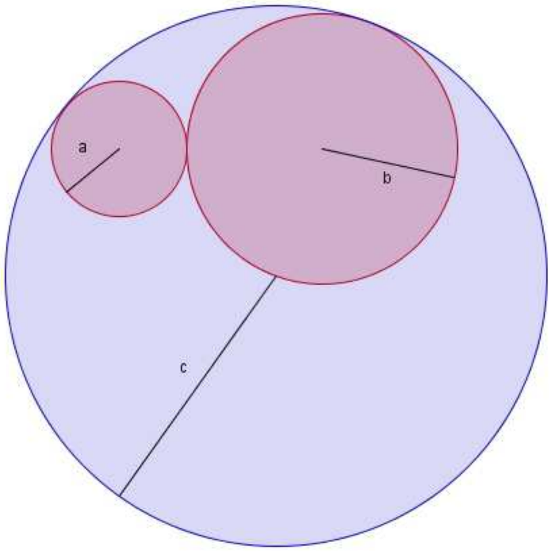
1) Calculer l'aire du domaine colorié en bleu sachant que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.



2) Calculer l'aire du domaine colorié en bleu sachant que $a^2 + b^2 - c^2 = 10$



3) Calculer l'aire du domaine colorié en bleu sachant que $c^2 - a^2 - b^2 = 100$



Corrigé 1 :

De manière évidente, il n'y a aucune formule toute faite pour calculer l'aire de la figure d'un coup. On va donc découper judicieusement la figure pour calculer l'aire tout en s'aidant du codage.

On a $A_F = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{FGE} + A_{ADEF} + A_C$ où A_C est l'aire du demi-disque de diamètre [HE].

- $A_{ABC} = \dfrac{BC \times BA}{2}$

  $A_{ABC} = \dfrac{3 \times 4}{2}$

  $A_{ABC} = 6cm^2$

- $A_{ACD} = \dfrac{CD \times CA}{2}$

  $A_{ACD} = \dfrac{3 \times 5}{2}$

  $A_{ACD} = 7{,}5cm^2$

- $A_{FGE} = \dfrac{FG \times AC}{2}$

  $A_{FGE} = \dfrac{4 \times 5}{2}$

  $A_{FGE} = 10cm^2$

- $H \in [DE]$ donc $DE = DH + HE$

  $DE = 3 + 3$

  $DE = 6cm$

On en déduit que $A_{ADEF} = DE \times CA$

$A_{ADEF} = 6 \times 5$

$A_{ADEF} = 30cm^2$

- $A_C = \dfrac{\pi r^2}{2}$

  $A_C = \dfrac{\pi \times 3^2}{2}$

  $A_C = \dfrac{9\pi}{2}$

  $A_C = 4{,}5\pi cm^2$

Bilan :

$A_F = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{FGE} + A_{ADEF} + A_C$

$A_F = 6 + 7{,}5 + 10 + 30 + 4{,}5\pi$

$A_F = 53{,}5 + 4{,}5\pi cm^2$

Corrigé 2 :

1) $A_1 = \pi \times r^2$

$A_1 = \pi \times 1^2$

$A_1 = \pi$ (valeur exacte)

$A_1 \approx 3cm^2$ (valeur approchée)

$A_2 = \pi \times r^2$

$A_2 = \pi \times 2^2$

$A_2 = 4\pi$ (valeur exacte)

$A_2 \approx 13cm^2$ (valeur approchée)

$A_3 = \pi \times r^2$

$A_3 = \pi \times 3^2$

$A_3 = 9\pi$ (valeur exacte)

$A_3 \approx 28cm^2$ (valeur approchée)

2) Rappel : $P = 2\pi r$

$P_1 = 2\pi r$

$P_1 = 2\pi \times 1$

$P_1 = 2\pi cm$

$P_2 = 2\pi r$

$P_2 = 2\pi \times 2$

$P_2 = 4\pi cm$

$P_3 = 2\pi r$

$P_3 = 2\pi \times 3$

$P_3 = 6\pi cm$

3) Si on compare A_1 et A_2, on peut conjecturer que l'aire d'un disque semble être multipliée par 4 lorsqu'on double le rayon (on passe de π à 4π). Montrons le.

L'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

L'aire d'un disque de rayon $2r$ est $\pi(2r)^2$.

Or $\pi(2r)^2 = \pi \times 2^2 \times r^2$

$\pi(2r)^2 = \pi \times 4 \times r^2$

$\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$

On en déduit que l'aire d'un disque de rayon $2r$ est $4\pi r^2$, c'est-à-dire le quadruple d'un disque de rayon r.

4) Si on compare P_1 et P_2, on peut conjecturer que le périmètre d'un cercle semble être multipliée par 2 lorsqu'on double le rayon (on passe de 2π à 4π). Montrons le.

Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.

Le périmètre d'un cercle de rayon $2r$ est $2\pi \times 2r$ c'est-à-dire $2 \times 2\pi r$.

On en déduit que lorsqu'on double le rayon d'un cercle, son périmètre est multiplié par 2.

Corrigé 3 :

1) Si le diamètre est de 6 cm, alors le rayon est de 3 cm.

On a $A_L = 2\pi \times r \times h.$

$A_L = 2\pi \times 3 \times 10$

$A_L = 60\pi \ \ cm^3$

2) On a $V = \pi \times r^2 \times h$

$V = \pi \times 3^2 \times 10$

$V = 90\pi \ cm^3$

3) On a 25 cL = 250 cm^3.

Le volume d'eau versé est donc de 250 cm^3. L'eau versée a évidemment la même forme que le cylindre de révolution de départ.

On a donc $250 = \pi \times 3^2 \times h$

$250 = 9\pi \times h$

$h = \dfrac{250}{9\pi}$ (valeur exacte)

$h \approx 9 cm$ (valeur approchée)

Corrigé 4 :

Le patron du cylindre sera constitué de 2 cercles et d'un rectangle.

Les deux cercles auront pour rayon 2 cm.

La largeur du rectangle sera de 5 cm.

La longueur du rectangle est égale au périmètre du cercle.

On a $P = 2\pi \times r$

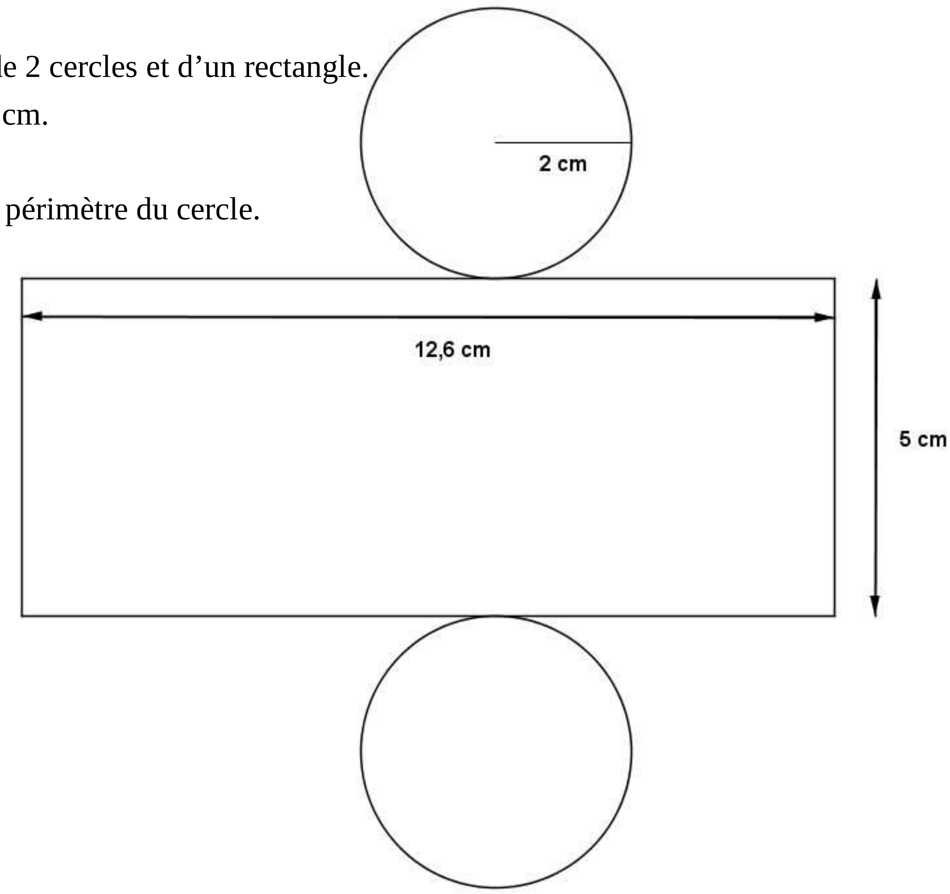
$P = 2\pi \times 2$

$P \approx 2 \times 3{,}14 \times 2$

$P \approx 2 \times 3{,}14 \times 2$

$P \approx 12{,}6 \ \text{cm}$

On obtient donc le patron ci-contre :



Corrigé 5 :

1) On a $V = \pi \times r^2 \times h$

$V = \pi \times r^2 \times 10$

Si $r = 4$, on a :

$V = \pi \times 4^2 \times 10$

$V = 160\pi$ cm^3

Si $r = 8$, on a :

$V = \pi \times 8^2 \times 10$

$V = 640\pi$ cm^3

Si $r = 16$, on a :

$V = \pi \times 16^2 \times 10$

$V = 2560\pi$ cm^3

On a donc :

r en cm	4	8	16
Volume en cm^3 (Valeur exacte)	160π	640π	2560π

On a $4 \times 2 = 8$ et $160\pi \times 2 = 320\pi \neq 640\pi$ donc le volume de la boite n'est pas proportionnelle au rayon de la boite.

2) On a $A_L = 2\pi \times r \times h.$

$A_L = 2\pi \times r \times 10.$

Si $r = 4$, on a :

$A_L = 2\pi \times 4 \times 10$

$A_L = 80\pi$ cm^2

Si $r = 8$, on a :

$A_L = 2\pi \times 8 \times 10$

$A_L = 160\pi$ cm^2

Si $r = 16$, on a :

$A_L = 2\pi \times 16 \times 10$

$A_L = 320\pi$ cm^2

On a donc :

r en cm	4	8	16
Aire latérale en cm^3 (Valeur exacte)	80π	160π	320π

Le coefficient de proportionnalité pour passer de la 1$^{\text{ère}}$ ligne à la 2$^{\text{ième}}$ est 20π donc l'aire latérale est proportionnelle au rayon de la boite.

Corrigé Problème 1 :

Si le diamètre est de 12 cm, alors le rayon est de 6 cm.

On a donc $V = \pi \times 6^2 \times 7$

$V = 252\pi \ cm^3$

$V \approx 792 \ cm^3$

Or $\frac{3}{4}$ L = 0,75 L =75 cL = 750 cm^3.

Comme $792 > 750$, l'eau ne débordera pas de la casserole.

Corrigé Problème 2 :

L'aire latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur H est $2\pi RH$.

Le volume d'un cylindre de révolution de rayon R est $\pi R^2 H$

Le volume du cylindre de révolution est égal au double de son aire latérale donc $\pi R^2 H = 4\pi RH$

Cette égalité peut aussi s'écrire : $\pi \times R \times R \times H = 4 \times \pi \times R \times H$

On en déduit donc que $R = 4$ cm.

Corrigé Problème 3 :

On a 20 mm = 2 cm.

On a $V_{caillou} = V_{final} - V_{initial}$

$$V_{caillou} = \pi \times r^2 \times h_{final} - \pi \times r^2 \times h_{initial}$$

$$V_{caillou} = \pi \times r^2 \times \left(h_{final} - h_{initial}\right)$$

$$V_{caillou} = \pi \times 3^2 \times 2 \text{ car } h_{final} - h_{initial} = 2 \text{ et } r = 3$$

$$V_{caillou} = 18\pi$$

$$V_{caillou} \approx 57 \text{ cm}^3$$

Corrigé Problème 4 :

Les cercles ont tous le même rayon et donc, par conséquent la même aire.

Soit x l'aire d'un cercle.

On a donc : aire bleue $= 4 \times \frac{3}{4} x = 3x$.

On a aussi : aire rouge $= x + 4 \times \frac{1}{4} x = x + x = 2x$

On en déduit que $\frac{\text{aire rouge}}{\text{aire bleue}} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

Corrigé Problème 5 :

Pour les trois questions, on prendra les notations suivantes :

- $\mathcal{A}_b$ l'aire du domaine colorié en bleu.
- $\mathcal{A}_1$ l'aire du cercle de rayon a.
- $\mathcal{A}_2$ l'aire du cercle de rayon b.
- $\mathcal{A}_3$ l'aire du cercle de rayon c.

1) On a $\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

$\mathcal{A}_b = \pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2$

$\mathcal{A}_b = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

$\mathcal{A}_b = \pi \times 1$ car $a^2 + b^2 + c^2 = \pi$

$\mathcal{A}_b = \pi$

L'aire du domaine colorié en bleu est donc de π.

2) On a $\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$

$\mathcal{A}_b = \pi a^2 + \pi b^2 - \pi c^2$

$\mathcal{A}_b = \pi(a^2 + b^2 - c^2)$

$\mathcal{A}_b = \pi \times 10$ car $a^2 + b^2 - c^2 = 10$

$\mathcal{A}_b = 10\pi$

L'aire du domaine colorié en bleu est donc de 10π.

3) On a $\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_b = \pi c^2 - \pi a^2 - \pi b^2$

$\mathcal{A}_b = \pi(c^2 - a^2 - b^2)$

$\mathcal{A}_b = \pi \times 100$ car $c^2 - a^2 - b^2 = 100$

$\mathcal{A}_b = 100\pi$

L'aire du domaine colorié en bleu est donc de 100π.