Exercice 1 : (Brevet National 2009)

L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : AB = 16 cm, AC = 14 cm et BC = 8 cm.

1) a) Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.
b) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

2) Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle), a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle : en notant a, b et c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

Calculer à l'aide de cette formule l'aire du triangle ABC.
Donner le résultat arrondi au cm² près.

Exercice 2 :

Dans un disque de rayon R, on découpe un secteur circulaire d'angle au centre α : on obtient ainsi deux patrons de cône, sans la base.
La formule suivante nous permet de calculer le volume du cône :

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2}$$

Dans chacun des cas suivants, calculer le volume du cône :

1) $R=6cm$ et $\alpha=90°$.

2) $R=8cm$ et $\alpha=60°$.

Exercice 3 :

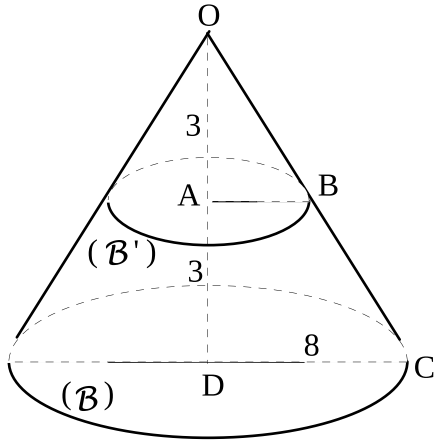
On coupe un cône de révolution de hauteur H et de rayon R par un plan parallèle à la base. On obtient ainsi un « petit » cône de rayon r et de hauteur h.

On suppose que $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$.

Montrer que le volume du tronc du cône obtenu est égal aux dix-neuf vingt-septièmes de celui du cône initial.

Exercice 4 : (Brevet Bordeaux 1993)

Dans l'espace, en tournant autour de la droite (OD), le triangle ODC rectangle en D engendre un cône de révolution ($\mathscr{C}$). Son sommet est le point O et sa base le disque ($\mathscr{B}$) de centre D et de rayon DC.



1) Calculer l'aire de ($\mathscr{B}$) arrondie au cm^2 et le volume de ($\mathscr{C}$) arrondi au cm^3

2) Le triangle OAB engendre le cône ($\mathscr{C}$') de sommet O et de base, le disque ($\mathscr{B}$')

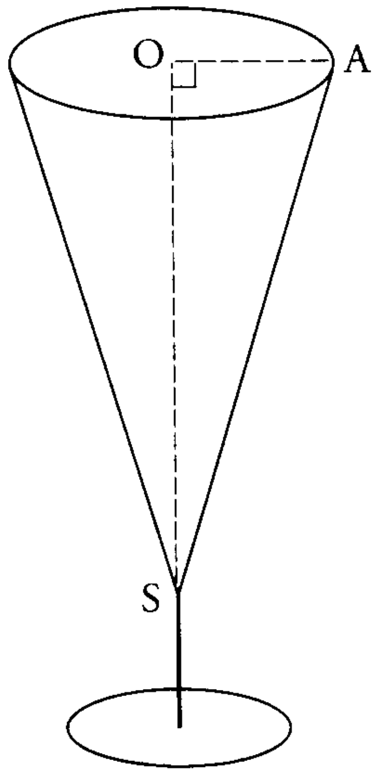
On admet que le plan de ($\mathscr{B}$') est parallèle à celui de ($\mathscr{B}$)

a) Par quel nombre faut-il multiplier l'aire de ($\mathscr{B}$) pour obtenir l'aire de ($\mathscr{B}$') ?

b) Par quel nombre faut-il multiplier le volume de ($\mathscr{C}$) pour obtenir le volume de ($\mathscr{C}$') ?

Exercice 5 : (Brevet Bordeaux 1996)

On considère le verre ci-dessous, ayant la forme d'un cône de révolution, de hauteur OS = 12 cm et de rayon OA = 3 cm.



R.Flouret

1) Montrer que le volume de ce verre (en cm^3) est égal à 36π.

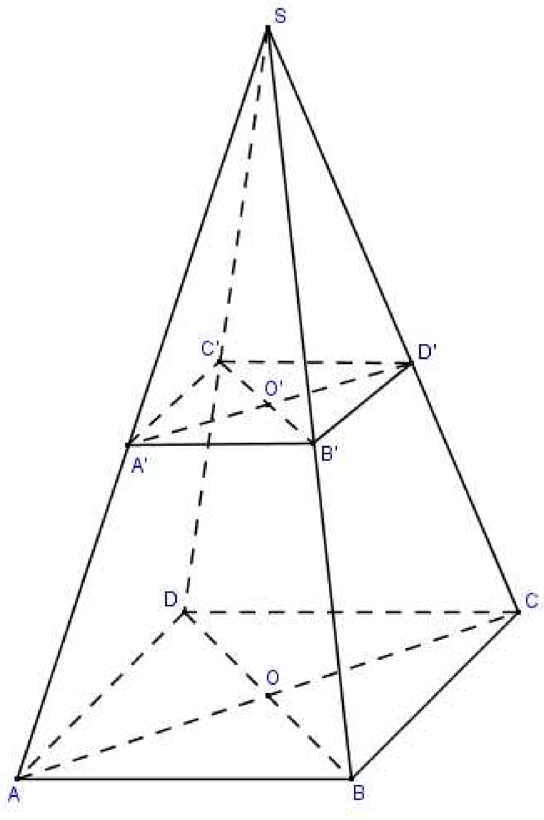
2) Avec un litre d'eau, combien de fois peut-on remplir ce verre entièrement ?

3) Si on remplit ce verre d'eau aux $\frac{5}{6}$ de sa hauteur, quel est alors le volume d'eau utilisée ? On donnera le résultat arrondi au cm^3 près.

4) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$ (donner la valeur arrondie au degré près).

Exercice 6 : (Brevet Groupement Sud 2006)

Pour la pyramide SABCD ci-contre :



La base est le rectangle ABCD de centre O.
AB = 3 cm et BD = 5 cm.
La hauteur [SO] mesure 6 cm.

1) Montrer que AD = 4 cm.

2) Calculer le volume de la pyramide SABCD en cm^3.

3) Soit O' le milieu de [SO].
On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

a) Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue ?

b) La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.
Donner le rapport de cette réduction.

c) Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

Corrigé 1 :

1) a) Pas de problème.

b) Dans le triangle ABC, le côté le plus long est [AB].

On a $AB^2 = 16^2 = 256$.

De plus, $AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2 = 260$

On a $256 \neq 260$ donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

2) On a $P = AB + AC + BC = 16 + 14 + 8 = 38cm$.

On a donc $\mathcal{A} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{38}{2}\left(\frac{38}{2}-16\right)\left(\frac{38}{2}-14\right)\left(\frac{38}{2}-8\right)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{19(19-16)(19-14)(19-8)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{19\times3\times5\times11}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{3135}$$

$$\mathcal{A} \approx 56cm^2$$

Corrigé 2 :

Ici, il suffit d'appliquer la formule !

1) $V = \frac{1}{3}\pi R^3\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi\times6^3\left(\frac{90}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{90}{360}\right)^2}$$

$$V \approx 14cm^3$$

2) $V = \frac{1}{3}\pi R^3\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi\times8^3\left(\frac{60}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{60}{360}\right)^2}$$

$$V \approx 15cm^3$$

Corrigé 3 :

Soit V le volume du cône initial, V' le volume du petit cône et V'' le volume du tronc du cône obtenu.

Le petit cône est une réduction du cône de départ et le rapport de la réduction est k avec $k = \frac{2}{3}$.

Dans le cas d'une réduction, les volumes sont multipliés par k^3.

On en déduit que : $V' = k^3 \times V$

$$V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V$$

$$V' = \frac{2^3}{3^3} \times V$$

$$V' = \frac{8}{27} V$$

Or $V'' = V - V'$

Donc $V'' = V - \frac{8}{27} V$

$$V'' = \frac{27}{27} V - \frac{8}{27} V$$

$$V'' = \frac{19}{27} V$$

Le volume du tronc du cône obtenu est donc égal aux dix-neuf vingt-septièmes de celui du cône initial.

Corrigé 4 :

1) On a $A_B = \pi DC^2 = \pi 8^2 = 64\pi$.

L'aire de ($\mathscr{B}$) arrondie au cm^2 est donc de 201 cm^2

Comme $A \in [OD]$, on a $OD = OA + AD = 3 + 3 = 6$ donc $V_C = \frac{OD \times A_B}{3} = \frac{6 \times 64\pi}{3} = 128\pi$

Le volume de ($\mathscr{C}$) arrondi au cm^3 est donc de 402 cm^3

2) a) Le cône ($\mathscr{C}$') de sommet O et de base le disque ($\mathscr{B}$') est une réduction du cône ($\mathscr{C}$) de sommet O et de base le disque ($\mathscr{B}$).

Le rapport de réduction est $k = \frac{OA}{OD}$.

On en déduit que $k = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Dans le cas d'une réduction, les aires sont multipliées par k^2.

Ainsi, pour obtenir l'aire de ($\mathscr{B}$'), il faut multiplier l'aire de ($\mathscr{B}$) par $0{,}5^2$ c'est-à-dire par $0{,}25$

b) De même, dans le cas d'une réduction, les volumes sont multipliées par k^3.

Ainsi, pour obtenir le volume de ($\mathscr{C}$'), il multiplier le volume de ($\mathscr{C}$) par $0{,}5^3$ c'est-à-dire par 0,125.

Corrigé 5 :

1) Soit V le volume de ce verre.

On a $V = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS$

$$V = \frac{108\pi}{3}$$

$$V = 36\pi$$

2) 1 litre d'eau équivaut à 1m^3 soit 1000 cm^3

De plus, $\frac{1000}{36\pi} \approx 8{,}84$.

On en déduit qu'avec un litre d'eau, on peut remplir 8 fois le verre entièrement.

3) Soit V' le volume d'eau contenu dans un verre rempli aux $\frac{5}{6}$.

Le nouveau cône formé est une réduction du cône du verre.

On a donc $V' = k^3 \times V$

$$V' = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times 36\pi$$

$$V' = \frac{5^3 \times 36\pi}{6^3}$$

$$V' \approx 65 cm^3$$

Le volume d'eau serait donc d'environ 65cm^3

4) Le triangle OSA est rectangle en O.

On a $\tan(\widehat{OSA}) = \frac{OA}{OS}$

$$\tan(\widehat{OSA}) = \frac{3}{12}$$

$$\widehat{OSA} \approx 14°$$

Corrigé 6 :

1) Le triangle ABD est un triangle rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$BD^2 = AD^2 + AB^2$

$AD^2 = BD^2 - AB^2$

$AD^2 = 5^2 - 3^2$

$AD^2 = 25 - 9$

$AD = 16$

$AD = \sqrt{16}$

$AD = 4cm$

2) On a $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times A_{ABCD} \times hauteur$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB \times AD \times SO$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 6$

$V_{SABCD} = 24cm^3$

3) a) Une section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est de même nature que la base donc A'B'C'D' est aussi un rectangle.

b) Le rapport de la réduction est $\frac{SO'}{SO}$. Comme O' est le milieu de [SO], on en déduit que $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$.

c) Lors d'une réduction, les volumes sont multipliés par k^3 où k est le rapport de la réduction.

On en déduit que $V_{SA'B'C'D'} = k^3 \times V_{SABCD}$

$V_{SA'B'C'D'} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 24$

$V_{SA'B'C'D'} = 3cm^3$