## Énoncé 1 :

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

Montrer que si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f$ est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque : En remplaçant $f$ par $-f$, on observe que ce théorème s'étend aux fonctions continues de signe constant sur $[a;b]$.

## Énoncé 2 :

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Montrer que si $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$, alors $f$ est de signe constant sur $[a;b]$.

Remarque : Cet exercice utilise le résultat de l'exercice précédent.

## Énoncé 3 :

Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$. On suppose que $\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b f^3(t)dt = \int_a^b f^4(t)dt$.

Montrer que $f$ est constante sur $[a;b]$.

Remarque : Cet exercice utilise aussi le résultat de l'exercice précédent.

## Corrigé 1 :

Soit $F : x \to \int_a^x f(t)dt$. $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en a.

Elle est croissante sur $[a;b]$ car $f$ est positive.

De plus, $\int_a^b f(t)dt = 0$ donc $F(b) = 0$

On en déduit que $F$ est une fonction croissante sur $[a;b]$ tel que $F(a) = F(b) = 0$. $F$ est donc constante sur $[a;b]$ et sa dérivée $f$ est donc nulle sur $[a;b]$.

## Corrigé 2 :

Supposons que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. L'hypothèse nous donne donc $\int_a^b \left(|f(t)| - f(t)\right)dt = 0$

De plus, $|f| - f$ est positive et continue sur $[a;b]$ donc d'après l'exercice précédent, $|f| - f$ est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Il vient que $f(t) = |f(t)|$ sur $[a;b]$ donc $f$ est positive sur $[a;b]$.

Supposons maintenant que $\int_a^b f(t)dt \leq 0$. On a donc $\int_a^b \left(|f(t)| + f(t)\right)dt = 0$.

En utilisant le même raisonnement, on aboutit à $f(t) = -|f(t)|$ sur $[a;b]$ donc $f$ est négative sur $[a;b]$.

## Corrigé 3 :

$\left(f^2 - f\right)^2$ est continue et positive sur $[a;b]$.

De plus, $\int_a^b \left(f^2(t) - f(t)\right)^2 dt = \int_a^b f^4(t)dt - 2\int_a^b f^3(t)dt + \int_a^b f^2(t)dt = 0$ (par hypothèse).

D'après l'exercice 1, on en déduit que $\left(f^2(x) - f(x)\right)^2 = 0$ sur $[a;b]$, autrement dit $f^2(x) - f(x) = 0$ sur $[a;b]$.

$$f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1$$

$f$ étant continue sur $[a;b]$, on en déduit que $\forall x \in [a;b], f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$