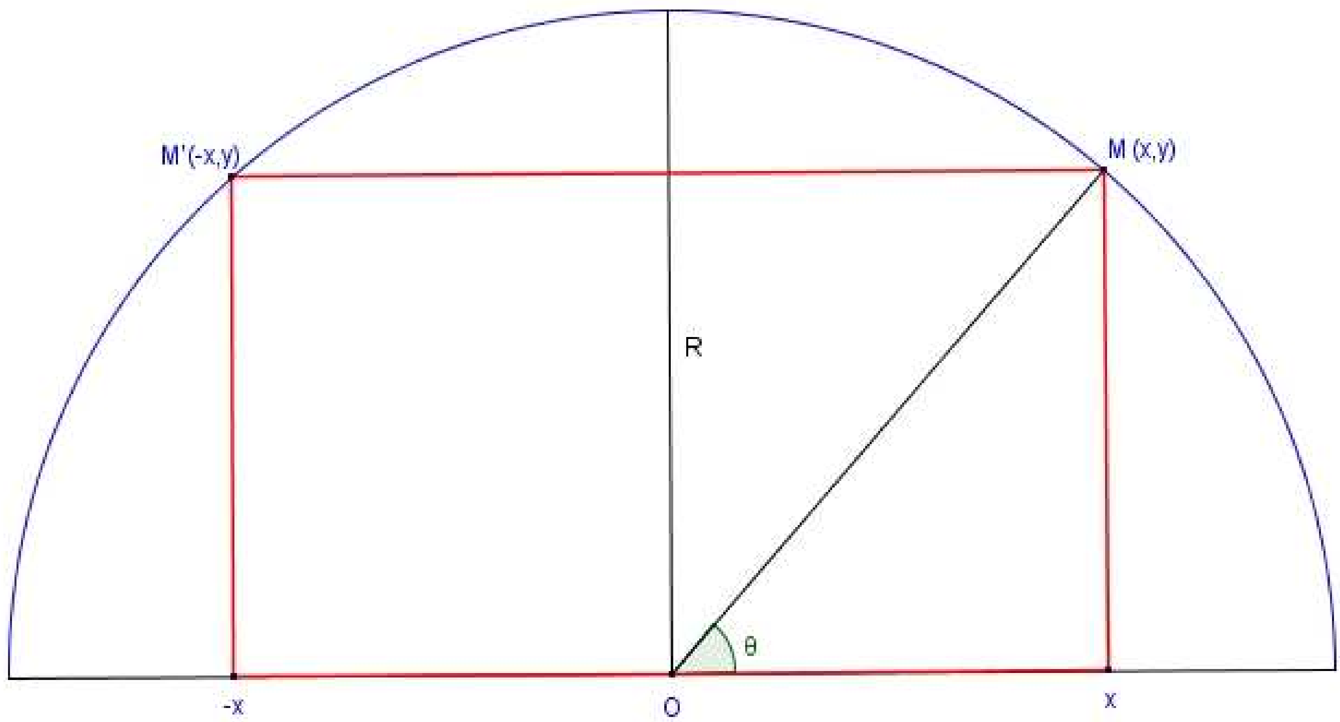
Énoncé 1 :

On considère un demi-cercle de rayon R et de centre O. On souhaite inscrire un rectangle d'aire maximale dans ce dernier.



Où doit-on placer le point M ?

Énoncé 2 :

Soit $f : \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \to x^3 + |x|$

Déterminer, si ils existent les valeurs des minimums et des maximums globaux de f .

R.Flouret

Corrigé 1 :

Soit A l'aire du rectangle.

On a $A = 2xy = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Soit $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}, x \in [0;R[$

On a $A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \dfrac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

On a $2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Or $x \in [0;R[$ donc $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

On a $A\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) = 2 \times \dfrac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{2}} = R^2$

On en déduit que l'aire maximale du rectangle est atteint pour $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ et vaut R^2.

Remarque : Une méthode géométrique est aussi possible. Il me semble bon de la connaître car cela peut-être une question du jury lors de l'entretien.

On a $A(\theta) = 2R^2 \cos\theta \sin\theta = R^2 \sin(2\theta)$ car $\cos\theta = \dfrac{x}{R}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{R}$.

$A(\theta)$ est maximale lorsque $\sin(2\theta)$ l'est, c'est à dire lorsque $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$, autrement dit $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

On retrouve ensuite le même résultat.

Corrigé 2 :

f est continue sur $\left[-2,\dfrac{1}{2}\right]$. Elle atteint donc son minimum et son maximum sur cet intervalle.

Candidats possibles :

- 0 car f n'est pas dérivable en ce point
- -2 et $\dfrac{1}{2}$ car ce sont les extrémités
- les points où f' s'annule.

On a $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 \text{ si } x>0\\ 3x^2-1 \text{ si } x<0\end{cases}$

f' ne s'annule donc pas sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.

$3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Or $x\in[-2;0[$ donc $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Nous obtenons le tableau suivant :

x	-2		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	-6	$\nearrow$	$f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{5}{8}$

Comme $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\approx 0{,}38$ et $\dfrac{5}{8}\approx 0{,}625$, on en déduit que f admet un minimum globale en -2 et un maximum globale en $\dfrac{1}{2}$.

R.Flouret