Énoncé 1 :

Soit f une fonction dérivable

1) Montrer que : f paire $\Leftrightarrow$ f' impaire
2) Montrer que : f impaire $\Rightarrow$ f' pair. Si de plus $f(0)=0$, alors f impair.

Énoncé 2 :

En calculant $f^{(n)}$ avec $f(x)=(x-a)^{2n}$, $a\in\mathbb{R}$, en déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Remarque 1 : Cela sous-entend que dans la leçon, vous avez énoncé la formule de Leibniz ! Une démonstration de cette formule est d'ailleurs proposée dans les applications de l'exposé 3.

Remarque 2 : Il y a une autre manière de démontrer cette formule. Pour cela je vous invite à regarder les applications de l'exposé n°3.

Corrigé 1 :

1) $(\Rightarrow)$ Si f paire, alors $f(-x)=f(x)$. Par dérivation, on obtient $-f'(-x)=f'(x)$ c'est-à-dire $f'(-x)=-f'(x)$.

$(\Leftarrow)$ Posons $\varphi(x)=f(x)-f(-x)$. On a alors $\varphi'(x)=f'(x)+f'(-x)$.

Or f' est impaire donc $f'(-x)=-f'(x)$.

Ainsi, $\varphi'(x)=0$ donc φ est constante, autrement dit $\varphi(x)=k, k\in\mathbb{R}$.

Comme $\varphi(0)=0$, on en déduit que $k=0$ puis que $f(x)=f(-x)$.

2) $(\Rightarrow)$ Si f est impaire, alors $f(-x)=-f(x)$. Par dérivation, on obtient $-f'(-x)=-f'(x)$ c'est-à-dire $f'(-x)=f'(x)$

$(\Leftarrow)$ Posons $\psi(x)=f(x)+f(-x)$. On a alors $\psi'(x)=f'(x)-f'(-x)$.

Or f' est paire donc $f'(-x)=f'(x)$.

Ainsi, $\psi'(x)=0$ donc ψ est constante, autrement dit $\psi(x)=k, k\in\mathbb{R}$.

Or $\psi(0)=2f(0)=0$ donc $k=0$. On en déduit donc que $f(-x)=-f(x)$.

Corrigé 2 :

On a $f(x)=(x-a)^{2n}=(x-a)^n(x-a)^n$

On pose $u(x)=(x-a)^n$ et $v(x)=(x-a)^n$

On a donc $u^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$ $v^{(n-k)}(x)=\dfrac{n!}{k!}(x-a)^k$

On applique alors la formule de Leibniz pour obtenir :

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{n!}{k!}\times(x-a)^n=n!\times(x-a)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Or $f(x)=(x-a)^{2n}$ donc $f^{(n)}(x)=\dfrac{(2n)!}{n!}\times(x-a)^n$.

On en déduit donc que $\dfrac{(2n)!}{n!}\times(x-a)^n=n!\times(x-a)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ c'est-à-dire $\dfrac{(2n)!}{n!\times n!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

Or $\dfrac{(2n)!}{n!\times n!}=\dbinom{2n}{n}$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

R.Flouret