Énoncé :

Étudier la courbe paramétrée définit par : $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$

Corrigé :

• Intervalle d'étude :

y est clairement 2π -périodique

On a aussi $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi$
On en déduit que pour α quelconque, l'arc C_n correspondant à $t \in [\alpha + 2n\pi, \alpha + 2(n+1)\pi]$ se déduit de l'arc C_0 correspondant à $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ par la translation de vecteur $2n\pi \vec{i}$. ($M(t+2\pi)$ est donc l'image de $M(t)$ par $t_{2\pi\vec{i}}$)

Ainsi, pour obtenir toute la courbe, il suffit de tracer l'arc C_0 correspondant à $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ puis compléter par des translations de vecteur $2n\pi \vec{i}$.

De plus, x est impair et y est pair. (Oy) est donc un axe de symétrie de C.

Centrons l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en O. En choisissant $\alpha = -\pi$, l'arc C_0 correspondant à $t \in [-\pi, \pi]$ se décompose en 2 arcs C'_0 et C''_0 correspondant à $t \in [0, \pi]$ et $t \in [-\pi, 0]$ image l'un de l'autre par la symétrie (Oy).

Nous pouvons donc restreindre notre intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

• Étude de la courbe :

On a $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = \sin t$.

On obtient donc le tableau suivant :

t	0		π
$x'(t)$	0	+	2
$y'(t)$	0	+	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y(t)$	0	$\nearrow$	2

R.Flouret

• Points particuliers :

Pour $t = 0$, on a un point stationnaire.

On a $x''(t) = \sin t$ et $y''(t) = \cos t$. On en déduit que $\vec{v_2}(0) = (0,1) \neq \vec{0}$

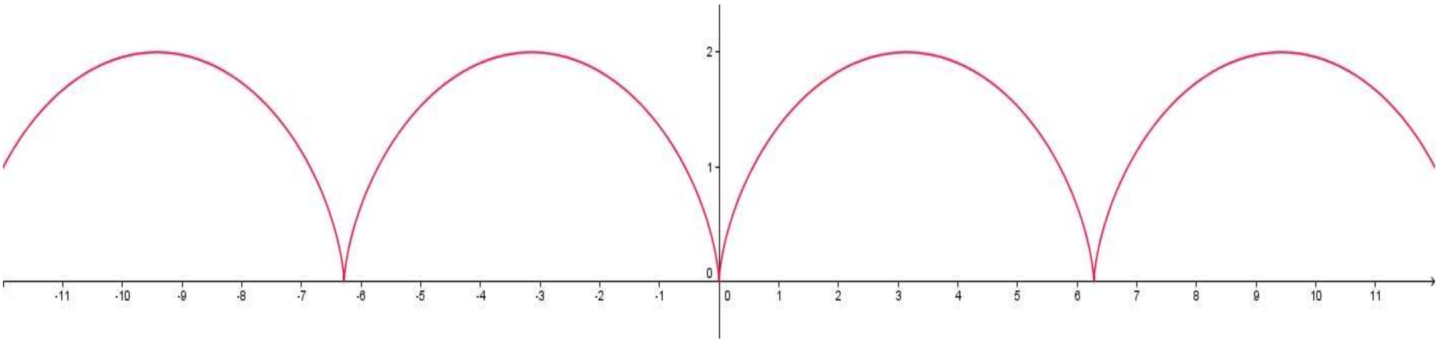
On a $x'''(t) = \cos t$ et $y'''(t) = -\sin t$. On en déduit que $\vec{v_3}(0) = (1,0)$

Regardons si $(\vec{v_2}, \vec{v_3})$ est libre.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. On en déduit que $(\vec{v_2}, \vec{v_3})$ est libre.

Ainsi, en 0, nous avons un point de rebroussement de 1ère espèce et la tangente est dirigée par $\vec{M}''(0)$ et donc par $\vec{j}$.

Nous obtenons donc la courbe suivante :



(Je n'ai évidemment représenté qu'une petite partie de la courbe !)

Remarque : Cette courbe est usuellement répertoriée sous le nom de cycloide. Elle correspond à la trajectoire d'un point lié à un cercle qui roule sans glisser sur une droite.