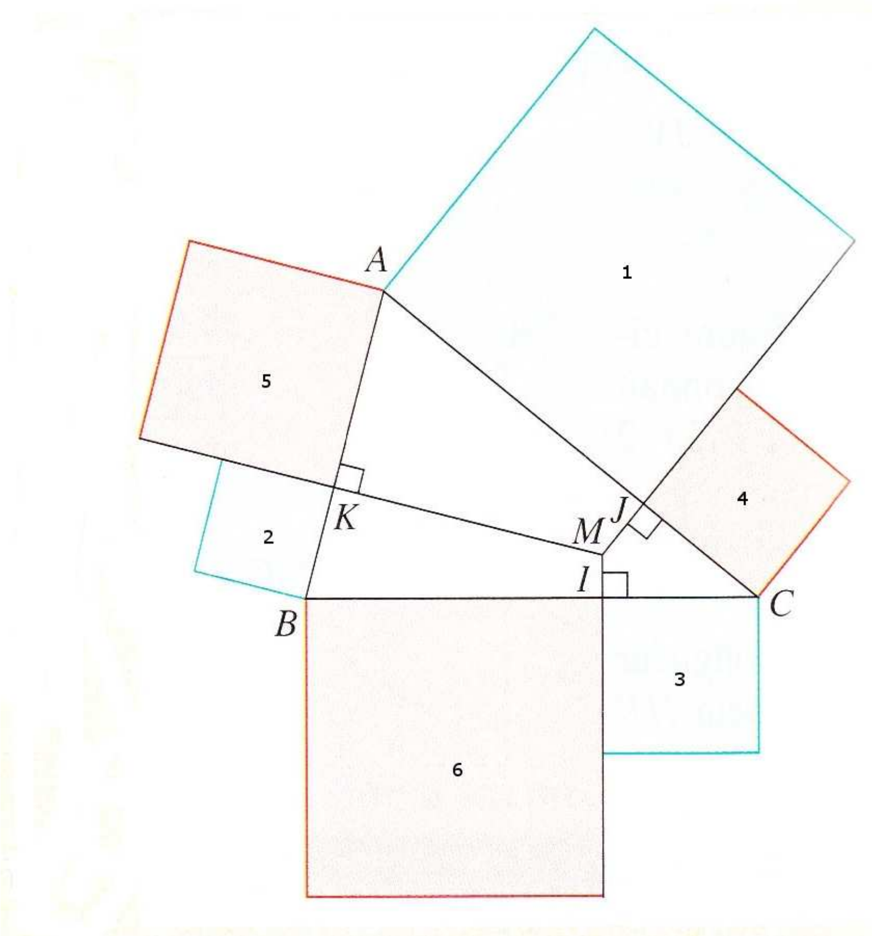
Énoncé :

Le point M est intérieur au triangle ABC et I, J, K sont les projetés de M sur les côtés du triangle ABC.
On construit ensuite, comme indiqué, 6 carrés à l'extérieur du triangle.

Comparer les sommes des aires des carrés 1,2,3 d'une part, et des carrés 4,5,6 d'autre part.



Corrigé :

Appliquons le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AMJ, AKM, KBM, MBI, ICM et MCJ.

On a donc :

$MA^2 = MJ^2 + JA^2$ $\quad$ $MB^2 = MI^2 + BI^2$
$MA^2 = MK^2 + KA^2$ $\quad$ $MC^2 = MI^2 + IC^2$
$MB^2 = MK^2 + KB^2$ $\quad$ $MC^2 = MJ^2 + JC^2$.

On a : Aire carré $1 = JA^2$ $\quad$ Aire carré $4 = JC^2$
Aire carré $2 = KB^2$ $\quad$ Aire carré $5 = AK^2$
Aire carré $3 = IC^2$ $\quad$ Aire carré $6 = BI^2$

Or : $JA^2 = MA^2 - MJ^2$ $\quad$ $JC^2 = MC^2 - MJ^2$
$KB^2 = MB^2 - MK^2$ $\quad$ $KA^2 = MA^2 - MK^2$
$IC^2 = MC^2 - MI^2$ $\quad$ $BI^2 = MB^2 - MI^2$

On a donc :

Aire carré 1 + Aire carré 2 + Aire carré $3 = JA^2 + KB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \left(MI^2 + MJ^2 + MK^2\right)$
Aire carré 4 + Aire carré 5 + Aire carré $6 = JC^2 + AK^2 + BI^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \left(MI^2 + MJ^2 + MK^2\right)$

On en déduit que la somme des aires des carrés 1,2,3 est égale à la somme des aires des carrés 4,5,6.

R.Flouret