Énoncé :

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point quelconque du plan.

1) Montrer que $MC \leq MA + MB$

2) Montrer que $MA + MB = MC \Leftrightarrow M$ appartient à l'arc de cercle circonscrit à ABC, limité par A et B et ne contenant pas C.

Corrigé :

1) ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow a + bj + cj^2$.

Or $1 + j + j^2 = 0$ donc $z + zj + zj^2 = 0$

Par soustraction, on en déduit que $z - a + j(z-b) + j^2(z-c) = 0$ d'où $-j^2(z-c) = z - a + j(z-b)$.

Ainsi, $\left|-j^2(z-c)\right| = \left|z - a + j(z-b)\right|$ autrement dit $\left|z-c\right| = \left|z - a + j(z-b)\right|$ (1)

Or $\left|z-c\right| = MC$ et $\left|z - a + j(z-b)\right| \leq \left|z-a\right| + \left|j(z-b)\right| \leq \left|z-a\right| + \left|z-b\right| = MA + MB$

On en déduit donc le résultat.

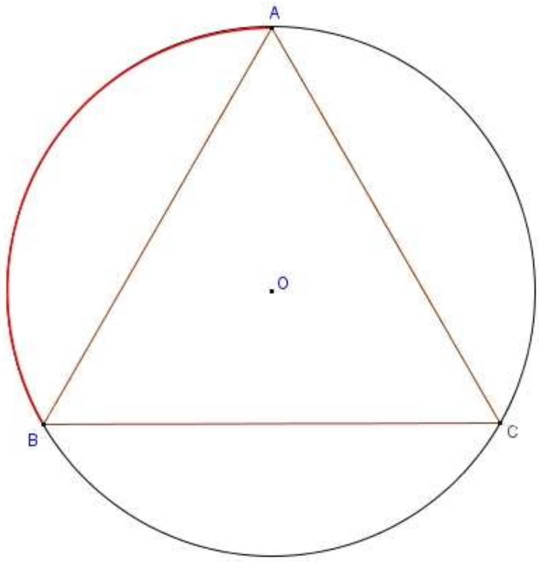
2) On a $\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1\right| + \left|z_2\right| \Leftrightarrow z_1$ et z_2 sont colinéaires et de même sens.

On a donc égalité dans (1) $\Leftrightarrow \arg(z-a) = \arg(j-b)[2\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \arg j[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à l'arc indiqué



Remarque : Le résultat : ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow a + bj + cj^2$ est un résultat classique qui n'est pas difficile à démontrer en se servant d'une rotation.

R.Flouret