Énoncé 1 :

Formule de Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}$, si f et g sont n fois dérivables, alors :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Énoncé 2 :

On considère une urne qui contient n boules rouges et n boules noires. On tire n boules simultanément. Combien y a-t-il d'échantillons de k boules rouges et $n-k$ boules noires ?

En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Corrigé 1 :

La preuve se fait par récurrence. Je vous laisse le soin de la rédiger correctement. Je donne juste l'étape de l'hérédité.

Hérédité : $(fg)^{(n+1)} = ((fg)')^{(n)} = (f'g + fg')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)}$

On applique alors l'hypothèse de récurrence pour obtenir :

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

On en déduit que :

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Corrigé 2 :

Il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ échantillons.

Le nombre de façons de tirer n boules parmis $2n$ est $\binom{2n}{n}$.

Mais les différents tirages possibles sont :

0 boules rouges et n boules noires $\Rightarrow \binom{n}{0}\binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2$

1 boules rouges et $n-1$ boules noires $\Rightarrow \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}^2$

$\vdots$

k boules rouges et $n-k$ boules noires $\Rightarrow \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$

R.Flouret

D'après le principe de la somme, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Remarque : Ce résultat peut aussi se démontrer à l'aide de fonctions bien choisies. Pour cela, jetez un coup d'œil aux applications de l'exposé 62.