Exercice 1 :

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est diagonalisable, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et la matrice A' dans cette base.

2) Déterminer, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la matrice A^n.

Exercice 2 :

Soit $A\in GL_6(\mathbb{R})$ telle que : $A^3-3A^2+2A=0$ et $tr(A)=8$.

Calculer le polynôme caractéristique χ_A.

Exercice 3 :

On note :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$$

a) Diagonaliser A dans $M_3(\mathbb{R})$

b) En déduire l'anticommutant de A, c'est-à-dire : $\{M\in M_3(\mathbb{R})\,/\,AM+MA=0\}$

Exercice 4 :

Soient $n\in N^*$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4+A^3+2A^2+A+I_n=0$.

Montrer que n est pair et que $-tr(A)\in\mathbb{N}$.

Exercice 5 : (CAPES 2009)

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout $i\in[1,n]$:

$$r_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \text{ et } D_i=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|\le r_i\}.$$

R.Flouret

1) a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose :

$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n . \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [1,n]$.

Montrer que pour tout entier $i \in [1,n]$, on a : $|\lambda v_i| \leq r_i \max\limits_{k \in [1,n]} (|v_k|)$

b) En déduire que : $\lambda \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

2) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ est associée la matrice carré d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P, et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si i - j} = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} & \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a : $\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$

b) En déduire que les racines de P(X) appartiennent au disque fermé de centre 0 et de rayon R où $R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|, ..., 1+|a_{n-1}|\}$

Corrigé 1 :

1) Pour déterminer les valeurs propres de f, on calcule le polynôme caractéristique de f.

$$P(X)=\det(A-XI_3)=\begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

En ajoutant la ligne 2 à la ligne 1, on obtient :

$$P(X)=\begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}=(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$

En enlevant la colonne 1 à la colonne 2, on obtient :

$$P(X)=(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}=-X(1-X)(2-X)$$

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ possède 3 valeurs propres distinctes : $\lambda_1=0, \lambda_2=1$ et $\lambda_3=2$. Il est donc diagonalisable.

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1=0$ et $u=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$u\in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow f(u)=0_{R^3} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$$

On en déduit que E_{λ_1} est la droite vectorielle de base $u_1(1,-1,0)$.

Soit E_{λ_2} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2=1$ et $u=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$u\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow f(u)=u \Leftrightarrow (f-Id_{R^3})(u)=0_{R^3} \Leftrightarrow (A-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-x \end{cases}$$

On en déduit que E_{λ_2} est la droite vectorielle de base $u_2(1,-1,-1)$.

Soit E_{λ_3} le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3=2$ et $u=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$u\in E_{\lambda_3} \Leftrightarrow f(u)=2u \Leftrightarrow (f-2Id_{R^3})(u)=0_{R^3} \Leftrightarrow (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

On en déduit que E_{λ_3} est la droite vectorielle de base $u_3(0,1,1)$.

Les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres associées à trois valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $B'=(u_1,u_2,u_3)$. Comme $f(u_1)=0_{R^3}$, $f(u_2)=u_2$ et $f(u_3)=2u_3$, la matrice A' de f dans la base B' est :

$$A'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ et $A=PA'P^{-1}$.

2) $A=PA'P^{-1}$ et pour tout entier n strictement positif, $A^n=PA'^n P^{-1}$.

On a $A'^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $B'=(u_1,u_2,u_3)$ à la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

$$\begin{cases}u_1=e_1-e_2\\u_2=e_1-e_2-e_3\\u_3=e_2+e_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=u_2+u_3\\e_2=-u_1+u_2+u_3\\e_3=u_1-u_2\end{cases}\text{ donc } P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Puis, $PA'^n=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&2^n\\0&-1&2^n\end{pmatrix}$ et $A^n=PA'^n P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2^n-1&2^n-1&1\\2^n-1&2^n-1&1\end{pmatrix}$

Corrigé 2 :

Par hypothèse, le polynôme $P=X^3-3X^2+2X$ est annulateur de A. Comme $P=X(X-1)(X-2)$ est scindé simple dans $\mathbb{R}$, la matrice A est alors diagonalisable dans $M_6(\mathbb{R})$ et son spectre est inclus dans $\{0,1,2\}$.

A est supposée inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A et donc $Sp(A)\subset\{1,2\}$.

Le polynôme caractéristique χ_A de A est donc de la forme $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^{\alpha}(\lambda-2)^{\beta}$, où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$ et $\alpha+\beta=6$

On a $tr(A)=\alpha\times 1+\beta\times 2$.

On en déduit que : $\begin{cases}\alpha+\beta=6\\\alpha+2\beta=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\\beta=2\end{cases}$

Finalement, $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^4(\lambda-2)^2$.

Corrigé 3 :

a) Quelques calculs nous amène à la diagonalisation $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. Notons $N = P^{-1}MP$. On a alors :

$$AM + MA = 0 \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0 \Leftrightarrow P(DN + ND)P^{-1} = 0 \Leftrightarrow DN + ND = 0.$$

Remarquons qu'en notant $I = I_2$, on a $D = \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Décomposons N en blocs : $N = \begin{pmatrix} X & C \\ L & y \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} DN + ND = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & C \\ L & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X & C \\ L & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2X & 2C \\ -L & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2X & -C \\ 2L & -y \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4X & C \\ L & -2y \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ L = 0 \\ C = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N = 0 \end{aligned}$$

Or $N = 0 \Leftrightarrow M = 0$ donc l'anticommutant de A est $\{0\}$.

Corrigé 4 :

Le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ est annulateur de A.

On a $P = (X^4 + X^3 + X^2) + (X^2 + X + 1) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = (X - i)(X + i)(X - j)(X - j^2) \in \mathbb{C}[X]$.

P est donc scindé simple sur $\mathbb{C}$ et A est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. On a $Sp_C(A) = \{i, -i, j, j^2\}$.

En particulier, les valeurs propres de A sont toutes non réelles.

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, les ordres de multiplicité, dans le polynôme caractéristique de A, de i et $-i$ sont égaux, et les ordres de multiplicité de j et j^2 sont égaux.

Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - i)^\alpha (\lambda + i)^\alpha (\lambda - j)^\beta (\lambda - j^2)^\beta$

On a alors $n = \deg(\chi_A) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$ donc n est pair.

On a aussi $tr(A) = \alpha i + \alpha(-i) + \beta j + \beta j^2 = \beta(j + j^2) = -\beta$ (on a utilisé le fait que $1 + j + j^2 = 0$).

On en déduit donc que $-tr(A) = \beta \in \mathbb{N}$.

Corrigé 5 :

1) a) On a $AV = \lambda V$ donc $|\lambda v_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||v_j| \le \max_{k\in[1,n]}(|v_k|)\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \le r_i \max_{k\in[1,n]}(|v_k|)$

b) Soit $1 \le j \le n$ tel que le nombre $|v_j|$ soit maximal parmi les $|v_k|, 1 \le k \le n$.

Comme le vecteur V est non nul, le nombre $|v_j|$ est non nul.

L'inégalité précédente implique que $|\lambda||v_j| \le r_j |v_j|$ et donc que $|\lambda| \le r_j$.

On en déduit que λ appartient au disque D_j et par conséquent $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$

2) a) Effectuons une récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1, P(X) = X + a_0$ et $M_P = (a_0)$.

On a donc $\det(M_P - zI_1) = (a_0 - z) = (-1)^1 P(z)$.

Hérédité : Supposons la propriété vrai jusqu'au rang $n-1$.

Soit $Q(X) = X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + ... + a_2 X + a_1$. On a donc $P(X) = XQ(X) + a_0$.

Si on développe le déterminant de la matrice $M_P - zI_n$ par rapport à la première ligne, on obtient :

$\det(M_P - zI_n) = (-z)\det(M_Q - zI_{n-1}) + (-1)^{n-1}(-a_0)$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à $Q(X)$ pour obtenir :

$\det(M_P - zI_n) = (-z)(-1)^{n-1}Q(z) + (-1)^{n-1}(-a_0) = (-1)^n (zQ(z) + a_0) = (-1)^n P(z)$

La propriété est donc vraie au rang n.

L'axiome de récurrence nous permet donc de conclure que $\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$.

b) Soit λ une racine de P(X). D'après la question précédente, λ est valeur propre de la matrice compagnon M_P.

D'après la question 1) b), λ appartient à la réunion des disques D_i de centre 0 et de rayon r_i égal à la somme des coefficients de la i-ième ligne de la matrice M_P.

Clairement, $r_1 = |a_0|$ et $r_i = 1 + |a_{i-1}|$ pour $2 \le i \le n$.

On en déduit donc que λ appartient au disque fermé de rayon R égal au maximum des nombres $|a_0|$ et $1 + |a_{i-1}|, 1 \le i \le n$.