Exercice 1 :

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A=3\sqrt{3}-2(1+\sqrt{3})$ $\quad B=2\sqrt{3}(-1+2\sqrt{3})$ $\quad C=(2\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+7)$ $\quad D=(1+2\sqrt{3})(2+5\sqrt{3})$

Exercice 2 :

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a nombre entier relatif et b nombre entier positif le plus petit possible.

$E=9\sqrt{7}-2\sqrt{28}-5\sqrt{63}$ $\quad F=\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$ $\quad G=2\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{18}$ $\quad H=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-\sqrt{80}$

Exercice 3 :

ABCD est un rectangle tel que $AB=(\sqrt{27}+\sqrt{3})cm$ et $BC=\sqrt{48}cm$.

1) Montrer que ABCD est un carré.
2) Calculer son périmètre et son aire.

Exercice 4 : (inspiré du Brevet Centres Étrangers Nice 2004)

ABC est un triangle tel que $AB=4\sqrt{5}cm$, $AC=\sqrt{125}cm$ et $BC=\sqrt{45}cm$.

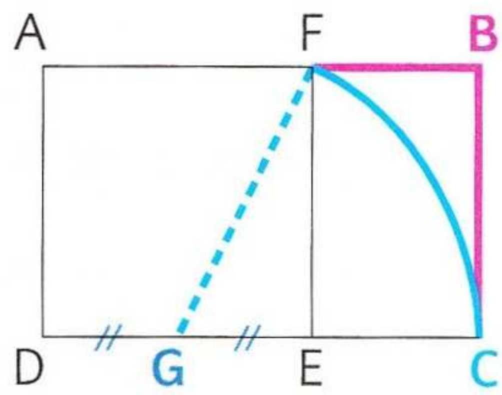
1) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Calculer le périmètre de ce triangle. On mettra le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$.
c) Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

2) On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
a) Préciser la position de son centre K.
b) Calculer la longueur du rayon de ce cercle et présenter la réponse sous la forme $\dfrac{a\sqrt{c}}{b}$.

3) D est le point tel que ACBD soit un parallélogramme. On note O le point d'intersection de ses diagonales.
a) Démontrer que les droites (BC) et (OK) sont parallèles.
b) Calculer la longueur OK.

Exercice 5 :

On considère la figure ci-dessous :



ADEF est un rectangle de côté l avec $l = 5cm$.
G est le milieu de [DE]. L'arc de cercle de centre G passant par F coupe la demi-droite [DE) en C.
Le point B est tel que ABCD soit un rectangle.

1) Montrer que $GF = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

2) Calculer la longueur exacte de la longueur L du rectangle ABCD.

3) Montrer que $\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Remarque : Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or.

Un rectangle dont les dimensions vérifient : $\frac{longueur}{largeur} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé rectangle d'or.

Corrigé 1 :

$A = 3\sqrt{3} - 2(1 + \sqrt{3})$
$A = 3\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3}$
$A = \sqrt{3} - 2$

$B = 2\sqrt{3}(-1 + 2\sqrt{3})$
$B = -2\sqrt{3} + 4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$
$B = -2\sqrt{3} + 4\times 3$
$B = -2\sqrt{3} + 12$

$C = (2\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 7)$
$C = 6\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} + 14\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 21$
$C = 6\times 2 + 5\sqrt{2} - 21$
$C = -9 + 5\sqrt{2}$

$D = (1 + 2\sqrt{3})(2 + 5\sqrt{3})$
$D = 2 + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\times\sqrt{3}$
$D = 2 + 9\sqrt{3} + 10\times 3$
$D = 32 + 9\sqrt{3}$

Corrigé 2 :

$E = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$
$E = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{7\times 4} - 5\sqrt{7\times 9}$
$E = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{4}\sqrt{7} - 5\sqrt{9}\sqrt{7}$
$E = 9\sqrt{7} - 2\times 2\sqrt{7} - 5\times 3\sqrt{7}$
$E = 9\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 15\sqrt{7}$
$E = -10\sqrt{7}$

$F = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$
$F = \sqrt{4\times 6} + \sqrt{9\times 6} - \sqrt{25\times 6}$
$F = \sqrt{4}\sqrt{6} + \sqrt{9}\times\sqrt{6} - \sqrt{25}\sqrt{6}$
$F = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}$
$F = 0$

$G = 2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$
$G = 2\sqrt{25\times 2} - \sqrt{49\times 2} - \sqrt{9\times 2}$
$G = 2\sqrt{25}\sqrt{2} - \sqrt{49}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2}$
$G = 2\times 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
$G = 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2}$
$G = 0$

$H = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - \sqrt{80}$
$H = 3\sqrt{4\times 5} + 4\sqrt{9\times 5} - \sqrt{16\times 5}$
$H = 3\sqrt{4}\sqrt{5} + 4\sqrt{9}\sqrt{5} - \sqrt{16}\sqrt{5}$
$H = 3\times 2\sqrt{5} + 4\times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$
$H = 6\sqrt{5} + 12\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$
$H = 14\sqrt{5}$

Corrigé 3 :

1) On a $AB = \sqrt{27} + \sqrt{3}$
$AB = \sqrt{9\times 3} + \sqrt{3}$
$AB = \sqrt{9}\sqrt{3} + \sqrt{3}$
$AB = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}$
$AB = 4\sqrt{3}cm$

De plus, $BC = \sqrt{48}$

$$BC = \sqrt{16 \times 3}$$
$$BC = \sqrt{16}\sqrt{3}$$
$$BC = 4\sqrt{3}cm$$

Dans le rectangle ABCD, on a $AB = BC$.
Or, si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.
Donc ABCD est un carré.

2) On a $P_{ABCD} = 4AB$

$$P_{ABCD} = 4 \times 4\sqrt{3}$$
$$P_{ABCD} = 16\sqrt{3}cm$$

Le périmètre du carré ABCD est donc de $16\sqrt{3}cm$.

On a $A_{ABCD} = AB^2$

$$A_{ABCD} = \left(4\sqrt{3}\right)^2$$
$$A_{ABCD} = 4^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$A_{ABCD} = 16 \times 3$$
$$A_{ABCD} = 48cm^2$$

L'aire du carré ABCD est donc de $48cm^2$.

Corrigé 4 :

1) a) On a $AB = 4\sqrt{5} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{80}cm$
Ainsi, dans le triangle ABC, le côté [AC] est le plus long.
On a $AC^2 = \left(\sqrt{125}\right)^2 = 125$
De plus, $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{80}\right)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 80 + 45 = 125$
On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que ABC est un triangle rectangle en B.

b) On a $P_{ABC} = AB + BC + CA$

$$P_{ABC} = 4\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{125}$$
$$P_{ABC} = 4\sqrt{5} + \sqrt{9\times5} + \sqrt{25\times5}$$
$$P_{ABC} = 4\sqrt{5} + \sqrt{9}\sqrt{5} + \sqrt{25}\sqrt{5}$$
$$P_{ABC} = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$
$$P_{ABC} = 12\sqrt{5}cm$$

On en déduit que le périmètre de ABC est donc de $12\sqrt{5}cm$.

c) On a $A_{ABC} = \dfrac{AB\times BC}{2}$

$$A_{ABC} = \frac{4\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}{2}$$
$$A_{ABC} = \frac{2\times2\times3\times\sqrt{5}\sqrt{5}}{2}$$
$$A_{ABC} = 6\times5$$
$$A_{ABC} = 30cm^2$$

L'aire du triangle ABC est donc de $30cm^2$.

2) [AC] est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC et K est le centre du cercle circonscrit à ABC.
Or, dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le milieu de l'hypoténuse.
Donc K est le milieu de [AC].

b) [AK] est un rayon du cercle circonscrit à ABC.
De plus, K est le milieu de [AC] donc $AK = \dfrac{AC}{2}$.

On en déduit que $AK = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}cm$

Le rayon de ce cercle est donc de $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}cm$.

3) a) Dans le parallélogramme ACBD, O est le point d'intersection des diagonales [AB] et [CD].
Or, dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.
Donc O est le milieu de [AB].

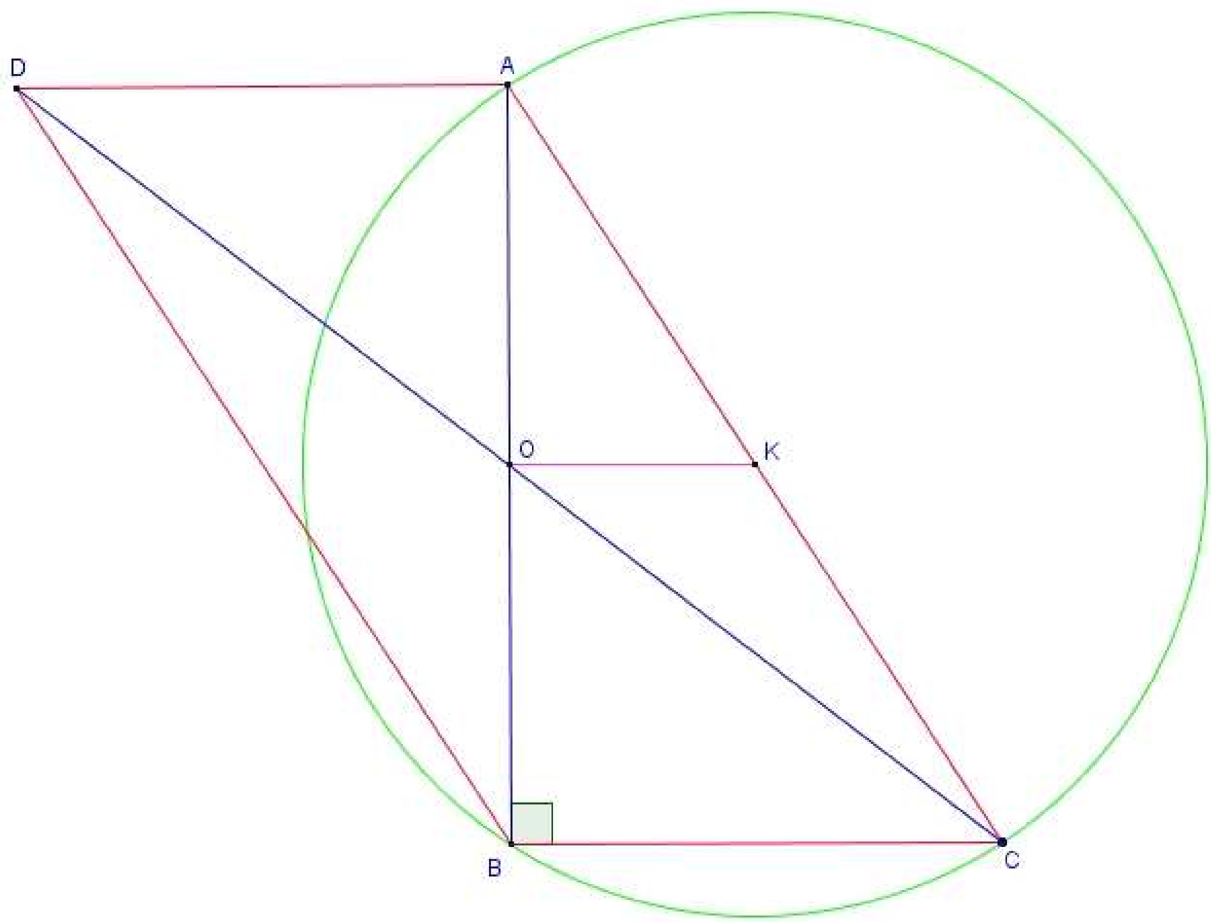
Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AB] et K est le milieu de [AC].
Or, dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc (OK)//(BC).

b) Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AB] et K est le milieu de [AC].
Or, dans un triangle, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, alors il a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

Donc $OK = \dfrac{BC}{2}$

De plus, $BC = 3\sqrt{5}cm$

Donc $OK = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}cm.$



Corrigé 5 :

1) G est le milieu de [DE] donc $DG = GE = \frac{DE}{2} = \frac{5}{2}cm$

GEF est un triangle rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$GF^2 = GE^2 + EF^2$$

$$GF^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2$$

$$GF^2 = \frac{25}{4} + 25$$

$$GF^2 = \frac{25}{4} + \frac{100}{4}$$

$$GF^2 = \frac{125}{4}$$

$$GF = \sqrt{\frac{125}{4}}$$

$$GF = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{4}}$$

$$GF = \frac{\sqrt{25 \times 5}}{2}$$

$$GF = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{2}$$

$$GF = \frac{5\sqrt{5}}{2}cm$$

2) On a $L = DC$.

L'arc de cercle de centre G passant par F coupe la demi-droite [DE) en C donc $GF = GC = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

De plus, $G \in [DC]$ donc $DC = DG + GC$

Ainsi, $DC = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{5}$

$$DC = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{2}$$

$$DC = \frac{5(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$L = \frac{5(1+\sqrt{5})}{2}cm$$

La longueur du rectangle ABCD est donc de $\frac{5(1+\sqrt{5})}{2}cm$.

R.Flouret

3) On a $l = 5cm$.

On en déduit que $L = \dfrac{5\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$

$$L = \frac{l\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$