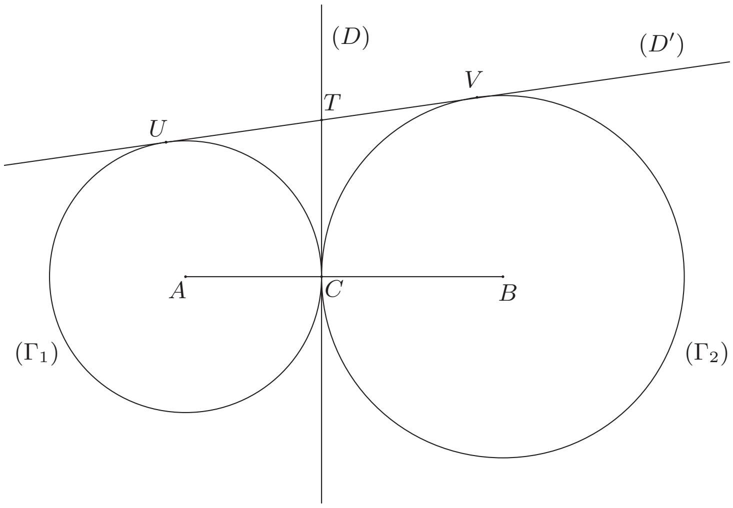
Dossier du 12 juillet 2009

Thème : Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) de centres respectifs A et B et tangents extérieurement en C. La droite (D) est la tangente commune à (Γ_1) et (Γ_2) en C et la droite (D') est tangente à (Γ_1) en U ($U \neq C$) et à (Γ_2) en V. Les deux droites (D) et (D') se coupent en T.



1) Montrer que le triangle UCV est rectangle en C.
2) Montrer que le triangle ATB est rectangle en T.
3) On donne deux cercles tangents extérieurement en un point C. En vous aidant des questions précédentes, donner une construction à la règle et au compas d'une droite tangente à ces deux cercles et ne passant pas par C.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** » dont l'un au moins utilisera le module de géométrie dynamique de la calculatrice.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

1) On a $U \in (\Gamma_1)$ et $C \in (\Gamma_1)$ donc $UA = AC$

UAT est un triangle rectangle en U
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AT^2 = UA^2 + UT^2$
$UT^2 = AT^2 - UA^2$

Aussi, le triangle ACT est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AT^2 = AC^2 + CT^2$
$CT^2 = AT^2 - AC^2$
$CT^2 = AT^2 - UA^2$
$CT^2 = UT^2$
Donc $CT = UT$

De la même manière, on montre que $TC = TV$

On a donc $TU = TV = TC$
De plus, U,T et V sont alignés.
Donc T est le milieu de [UV]

Dans le triangle UCV, T est le milieu de [UV] et $TU = TV = TC$
Or, si dans un triangle le milieu d'un côté est équidistant de ses trois sommets, alors ce triangle est rectangle.
Donc UCV est un triangle rectangle en C.

2) Des égalités UA=CA et TU=TC, on en déduit que (AT) est la médiatrice de [UC].
De même, (TB) est la médiatrice de [VC].

Soit D le point d'intersection de (UC) et (AT) et E le point d'intersection de (TB) et (CV).
On a donc $\widehat{CDT} = 90°$ et $\widehat{CET} = 90°$
D'après la question précédente, $\widehat{DCE} = 90°$.
Le quadrilatère TDCE a donc 3 angles droits. C'est donc un rectangle.

On en déduit que $\widehat{DTE} = 90°$ et par suite, que ATB est un triangle rectangle en T.

3) Soit (C_1) et (C_2) deux cercles de centre A et B tangents extérieurement en C.

On trace le segment [AB] (qui va donc passer par C)
On trace la tangente aux 2 cercles en C. Pour cela, on peut, par exemple, tracer la médiatrice de [AF] où F est tel que C soit le milieu de [AF]

Pour tracer le triangle rectangle ATB rectangle en T, il faut tracer le cercle circonscrit à ce triangle. Etant rectangle, il suffit de trouver le milieu I de [AB]. Pour cela, on trace la médiatrice de [AB] qui coupera [AB] en son milieu.

T est le point d'intersection de la tangente commune aux 2 cercles et du cercle de centre I milieu de [AB] et de rayon [AI]. (Dans un souci de clareté, je n'ai tracé que le demi-cercle sur le dessin).

Maintenant, reste à contruire U et V. Pour cela, il suffit de tracer le symétrique de C par rapport à (AT) et le symétrique de C par rapport à (BT).

Ici, U est donc le point d'intersection de (C_1) avec le cercle de centre T et de rayon [TC] et V est le point d'intersection de (C_2) avec le cercle de centre T et de rayon [TC].
(UV) est alors la tangente recherchée.