Dossier du 1er juillet 2009

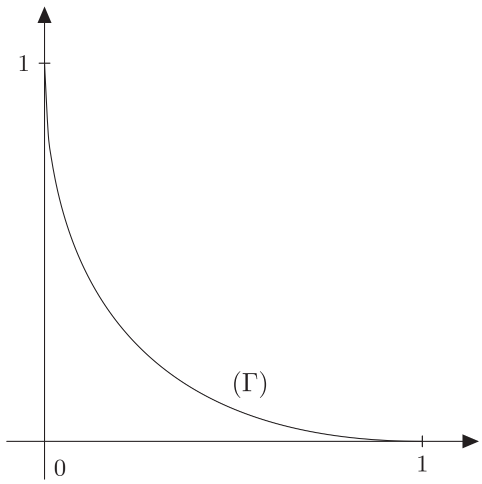
Thème : Fonctions
Étude de représentations graphiques

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, la courbe (Γ) représentative de f est donnée ci-dessous.



1) a) Montrer que le point M de coordonnées (x, y) appartient à (Γ) si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
   b) Montrer que (Γ) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) La courbe (Γ) est-elle un arc de cercle ? Justifier.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 2) ;

◇ un ou plusieurs exercices faisant appel à l'étude ou à l'utilisation de représentations graphiques de fonctions.

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

1) a) Cette question n'est pas bien difficile une fois que l'on a remarqué que $f(x)=\left(1-\sqrt{x}\right)^2\left(=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\right)$ et que $\forall x\in[0;1], 1-\sqrt{x}\geq 0$.

b) Une étude de fonction classique montre que f établit une bijection de $[0;1]$dans $[0;1]$. Nous pouvons donc calculer $fof(x)$.

$\forall x\in[0;1], f\left(f(x)\right)=f(x)-2\sqrt{f(x)}+1=x-2\sqrt{x}+1-2\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}+1=x-2\sqrt{x}+2-2\left|\sqrt{x}-1\right|$

Or $x\in[0;1]$donc $\sqrt{x}\in[0;1]$. Ainsi, $\left|\sqrt{x}-1\right|=1-\sqrt{x}$.

Finalement, $\forall x\in[0;1], f\left(f(x)\right)=x-2\sqrt{x}+2-2(1-\sqrt{x})=x$.

On en déduit que (Γ) est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2) Supposons que la courbe (Γ)soit un arc de cercle. Soit I le centre du cercle.
Calculons $f'(1)$.

On a $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f'(1)=0$.

On en déduit que si (Γ)est un arc de cercle, alors sont centre I a pour abscisse 1 (rayon perpendiculaire à la tangente).

De plus, si (Γ)est un arc de cercle alors le centre de ce cercle est sur la médiatrice du segment joignant les points (0 ; 1) et (1 ; 0). Le centre du cercle doit donc appartenir à la droite d'équation $y=x$.

On en déduit que si (Γ)soit un arc de cercle, alors son centre I a pour coordonnées (1 ; 1) et il a pour rayon 1.
L'équation du cercle est donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Cherchons le point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=x$.

$$x-2\sqrt{x}+1=x\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Ainsi, le point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=x$ a pour coordonnées ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$).

Or les coordonnées de ce point ne vérifient pas l'équation du cercle.

(Γ)n'est donc pas un arc de cercle.