Brevet 1996 : Bordeaux

I) Activités numériques

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on utilisera le programme de calcul ci-après :

Programme de calcul :

- choisir un nombre x ;
- retrancher 3 au double de x ;
- élever le résultat au carré ;
- retrancher 16 au résultat obtenu.

1) Si on choisit $x = 5$, quel résultat final obtient-on ?

2) Indiquer, parmi les expressions suivantes, celle qui décrit le programme donné :

a) $2x - 3^2 - 16$ c) $(2x - 3) \times 2 - 16$ e) $(2x-3)^2 - 16$

b) $[(x - 3) \times 2]^2 - 16$ d) $16 - [2 \times (x-3)]^2$ f) $(3x - 16)^2 - 2$

3) a) On pose : $F = (3x-16)^2 - 2$. Développer et réduire F.

b) On pose : $E = (2x-3)^2 - 16$. Montrer que $E = (2x-7)(2x+1)$

4) Pour quelles valeurs de x le programme de calcul donne-t-il le nombre 0 pour résultat final ?

Exercice 2 :

1) Résoudre le système suivant, d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$$

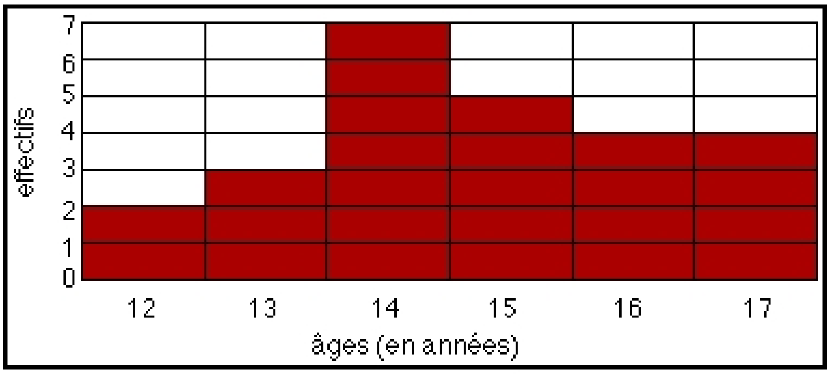
2) Si x désigne le prix d'un article, exprimer en fonction de x le prix de cet article après une baisse de 20 %.

3) Pour l'achat d'un livre et d'un stylo, la dépense est de 35 F. Après une réduction de 20 % sur le prix du livre et de 30 % sur le prix du stylo, la dépense n'est que de 26 F.

Calculer le prix d'un livre et celui d'un stylo avant la réduction.

Exercice 3 :

L’histogramme ci-dessous donne les âges des adhérents d'un club de natation :



1) Combien d'adhérents compte ce club ?

2) Reproduire et compléter le tableau ci-après :

Age						
effectif						
férquence						

3) Quel est l'âge moyen des adhérents de ce club ?

II) Activités Géométriques :

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1 :

1) Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 10 cm et BC = 8 cm (on laissera les traits de construction apparents).

2) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

3) On appelle E le point du segment [AC] pour lequel AE = $\frac{1}{4}$ AC.

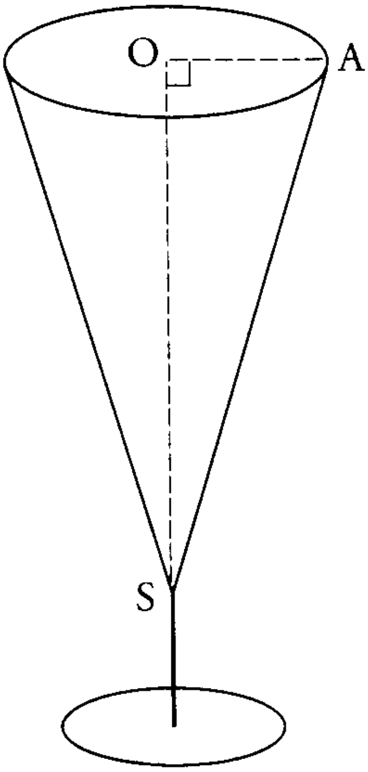
Le cercle de diamètre [AE] coupe [AB] en F.

a) Démontrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

b) Calculer AF et EF.

Exercice 2 :

On considère le verre ci-dessous, ayant la forme d'un cône de révolution, de hauteur OS = 12 cm et de rayon OA = 3 cm.



1) Montrer que le volume de ce verre (en cm^3) est égal à 36π.

2) Avec un litre d'eau, combien de fois peut-on remplir ce verre entièrement ?

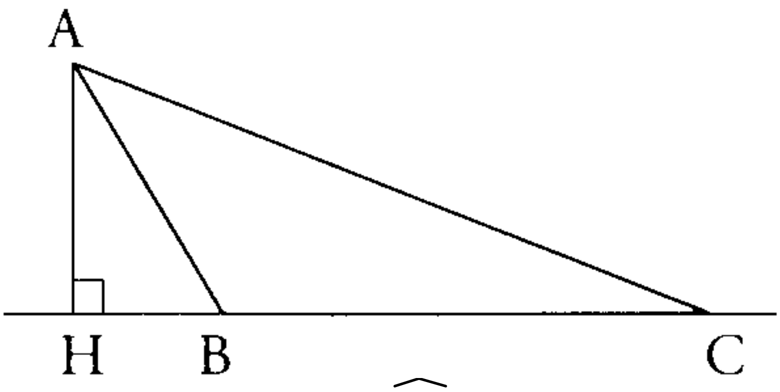
3) Si on remplit ce verre d'eau aux $\frac{5}{6}$ de sa hauteur, quel est alors le volume d'eau utilisée ? On donnera le résultat arrondi au cm^3 près.

4) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSA}$ (donner la valeur arrondie au degré près).

Problème :

ABC est un triangle tel que AB = 6 cm, BC =10 cm et $\widehat{ABC}$ = 120°.
La hauteur issue de A coupe la droite (BC) au point H.

(La figure ci-dessous est donnée à titre indicatif on ne demande pas de la reproduire.)



1) a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HBA}$. En déduire BH.

b) Calculer AH, puis l'aire du triangle ABC (on donnera les valeurs exactes).

c) Prouver que AC = 14 cm.

2) M est un point quelconque du segment [BC].
On pose CM = x ($0 \leq x \leq 10$). La parallèle à (AB) contenant M coupe [AC] en N.

a) Exprimer en fonction de x : NM et NC, puis BM et AN.

b) Déduire de la question précédente que le périmètre P_1 du triangle NMC vaut $3x$ et que le périmètre P_2 du trapèze ABMN vaut $-\frac{9}{5}x+30$.

3) a) Tracer sur une même figure, pour x compris entre 0 et 10, les représentations graphiques, dans un repère orthogonal, de la fonction qui à x associe $3x$ et de celle qui à x associe $-\frac{9}{5}x+30$ (unité : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
On désigne par K le point d'intersection de ces deux représentations.

b) A l'aide du graphique, encadrer par deux entiers consécutifs l'abscisse du point K (on laissera apparents les traits de construction).

c) Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de K.

d) En déduire pour quelle valeur de x le triangle NMC et le trapèze ABMN ont le même périmètre. Quelle est alors la valeur de ce périmètre ?

I) Activités numériques

Corrigé 1 :

1) • choisir un nombre x : 5
- retrancher 3 au double de x : $2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$
- élever le résultat au carré : $7^2 = 49$
- retrancher 16 au résultat obtenu : $49 - 16 = 33$

Si on choisit $x = 5$, on obtient 33 (comme par hasard !)

2) L'expression qui décrit le programme donné est : $(2x-3)^2 - 16$

3) a) $F = (3x-16)^2 - 2$

$$F = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 16 + 16^2 - 2$$
$$F = 9x^2 - 96x + 256 - 2$$
$$F = 9x^2 - 96x + 254$$

b) $E = (2x-3)^2 - 16$

$$E = (2x-3)^2 - 4^2$$
$$E = (2x-3-4)(2x-3+4)$$
$$E = (2x-7)(2x+1)$$

4) Le programme de calcul donnera le nombre 0 si $(2x-3)^2 - 16 = 0$ c'est-à-dire si $(2x-7)(2x+1) = 0$
Or un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul
On a donc soit $2x - 7 = 0$ soit $2x + 1 = 0$

$2x = 7$ | $2x = -1$

$x = \frac{7}{2} = 3{,}5$ | $x = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

Le programme de calcul donne donc 0 lorsque $x = 3{,}5$ ou $x = -0{,}5$.

Corrigé 2 :

1) On considère le système suivant : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$

La première équation nous donne $x = 35 - y$.
Remplaçons x par sa valeur en fonction de y dans la seconde équation :

$$8 \times (35 - y) + 7y = 260$$
$$280 - 8y + 7y = 260$$
$$y = 280 - 260$$
$$y = 20$$

On remplace la valeur de y dans l'équation $x = 35 - y$. On obtient donc $x = 35 - 20$

$$x = 15$$

Vérification :

$x+y=15+20=35$
$8x+7y=8\times15+7\times20=120+140=260$

2) On a $x-\frac{20}{100}x=x-0{,}2x=0{,}8x$.

Ainsi, le nouveau prix en fonction de x est $0{,}8x$.

3) Soit x le prix d'un livre et soit y le prix d'un stylo.
D'après la question précédente, nous pouvons affirmer que le nouveau prix du livre est $0{,}8x$
Un calcul similaire nous montre que le nouveau prix du style est de $0{,}7y$.

On est donc ramener à résoudre le sytème suivant : $\begin{cases} x+y=35 \\ 0{,}8x+0{,}7y=26 \end{cases}$.

En multipliant la $2^{\text{ième}}$ équation par 10, on est ramené au système : $\begin{cases} x+y=35 \\ 8x+7y=260 \end{cases}$

Ce système a déjà été résolu à la première question.

Nous pouvons donc en déduire que le prix du livre avant réduction est de 15 F et celui du stylo est de 20 F.

Corrigé 3 :

1) On a $2+3+7+5+4+4=25$ donc le club compte 25 adhérents.

2) Pour avoir la fréquence en %, il faut effectuer le calcul suivant : $\frac{\text{effectif du caractère}}{\text{effectif total}}\times100$. Nous obtenons facilement le tableau suivant :

Age	12	13	14	15	16	17
effectif	2	3	7	5	4	4
férquence	8 %	12 %	28 %	20 %	16 %	16 %

3) Soit m la moyenne d'âge des adhérents du club .

On a donc $m=\frac{12\times2+13\times3+14\times7+15\times5+16\times4+17\times4}{2+3+7+5+4+4}$

$m=\frac{368}{25}$

$m=14{,}72$

La moyenne d'âge des adhérents du club est donc comprise entre 14 et 15 ans.

II) Activités géométriques

Corrigé 1 :

1) Voir à la fin

2) Dans le triangle ABC, le côté [AC] est le plus long.
On a $AC^2 = 10^2 = 100$
De plus, $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3) a) F appartient au cercle de diamètre [AE].
D'après la réciproque de la propriété de l'angle droit
$\widehat{AFE} = 90°$ donc (AF)$\perp$(FE)
De plus, $F \in [AB]$
donc (AB)$\perp$(FE)

ABC est un triangle rectangle en donc (AB)$\perp$(BC)

Ainsi, (AB)$\perp$(BC) et (AB)$\perp$(FE)
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
donc (BC)//(EF)

b) On sait que $AE = \frac{1}{4} AC$ donc $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$
Dans le triangle ABC, on a :

- $E \in [AC]$
- $F \in [AB]$
- (EF)//(BC)

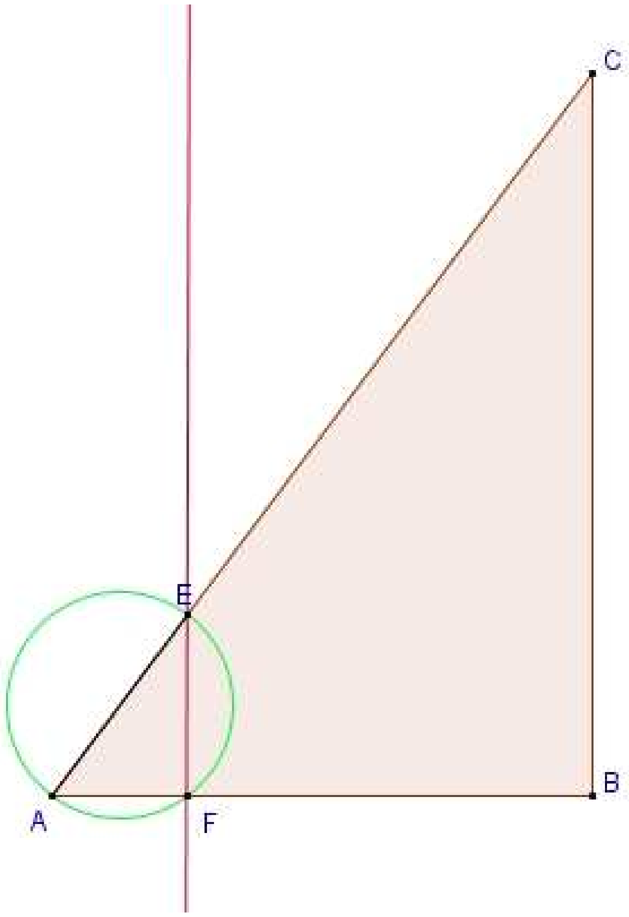
D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Calcul de AF :

$\frac{AF}{6} = \frac{1}{4}$ donc $AF = \frac{6}{4}$
$AF = 1{,}5cm$

Calcul de EF :

$\frac{EF}{8} = \frac{1}{4}$ donc $EF = \frac{8}{4}$
$EF = 2cm$



Corrigé 2 :

1) Soit V le volume de ce verre.

On a $V = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS$

$V = \frac{108\pi}{3}$

$V = 36\pi$

2) 1 litre d'eau équivaut à 1m^3 soit 1000 cm^3

De plus, $\frac{1000}{36\pi} \approx 8{,}84$.

On en déduit qu'avec un litre d'eau, on peut remplir 8 fois le verre entièrement.

3) Soit V' le volume d'eau contenu dans un verre rempli aux $\frac{5}{6}$.

Le nouveau cône formé est une réduction du cône du verre.

On a donc $V' = k^3 \times V$

$V' = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times 36\pi$

$V' = \frac{5^3 \times 36\pi}{6^3}$

$V' \approx 65cm^3$

Le volume d'eau serait donc d'environ 65cm^3

R.Flouret

4) Le triangle OSA est rectangle en O.

On a $\tan(\widehat{\text{OSA}}) = \dfrac{OA}{OS}$

$\tan(\widehat{\text{OSA}}) = \dfrac{3}{12}$

$\widehat{\text{OSA}} \approx 14°$

Problème :

1) a) On a $\widehat{HBC} = \widehat{HBA} + \widehat{ABC}$

$\widehat{HBA} = \widehat{HBC} - \widehat{ABC}$

$\widehat{HBA} = 180° - 120°$

$\widehat{HBA} = 60°$

Le triangle AHB est rectangle en H.

On a $\cos \widehat{HBA} = \dfrac{BH}{AB}$

$\cos 60° = \dfrac{BH}{6}$

$BH = 6 \times \cos 60°$

$BH = 3cm$

b) Le triangle AHB est rectangle en H

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$AH^2 = AB^2 - HB^2$

$AH^2 = 6^2 - 3^2$

$AH^2 = 36 - 9$

$AH^2 = 27$

$AH = \sqrt{27}$

$AH = \sqrt{9 \times 3}$

$AH = 3\sqrt{3}cm$

On a $A_{ABC} = \dfrac{HB \times HA}{2}$

$A_{ABC} = \dfrac{3 \times 3\sqrt{3}}{2}$

$A_{ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} cm^2$

c) $B \in [HC]$ donc $HC = HB + BC = 3 + 10 = 13cm$

Le triangle AHC est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AC^2 = AH^2 + HC^2$

$AC^2 = 27 + 13^2$

$AC^2 = 27 + 169$

$AC^2 = 196$

$AC = \sqrt{196}$

$AC = 14cm$

2) a) Dans le triangle ABC, on a :

- $M \in [BC]$
- $N \in [AC]$
- (MN)//(AB)

D'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Calcul de MN :

$\frac{x}{10} = \frac{MN}{6}$ donc $10 \times MN = 6 \times x$
$$MN = \frac{6x}{10}$$
$$MN = \frac{3x}{5}$$

Calcul de CN :

$\frac{CN}{14} = \frac{x}{10}$ donc $10 \times CN = 14 \times x$
$$CN = \frac{14x}{10}$$
$$CN = \frac{7x}{5}$$

$M \in [BC]$ donc $BM = BC - MC = 10 - x$

$N \in [AC]$ donc $AN = AC - NC = 14 - \frac{7x}{5}$

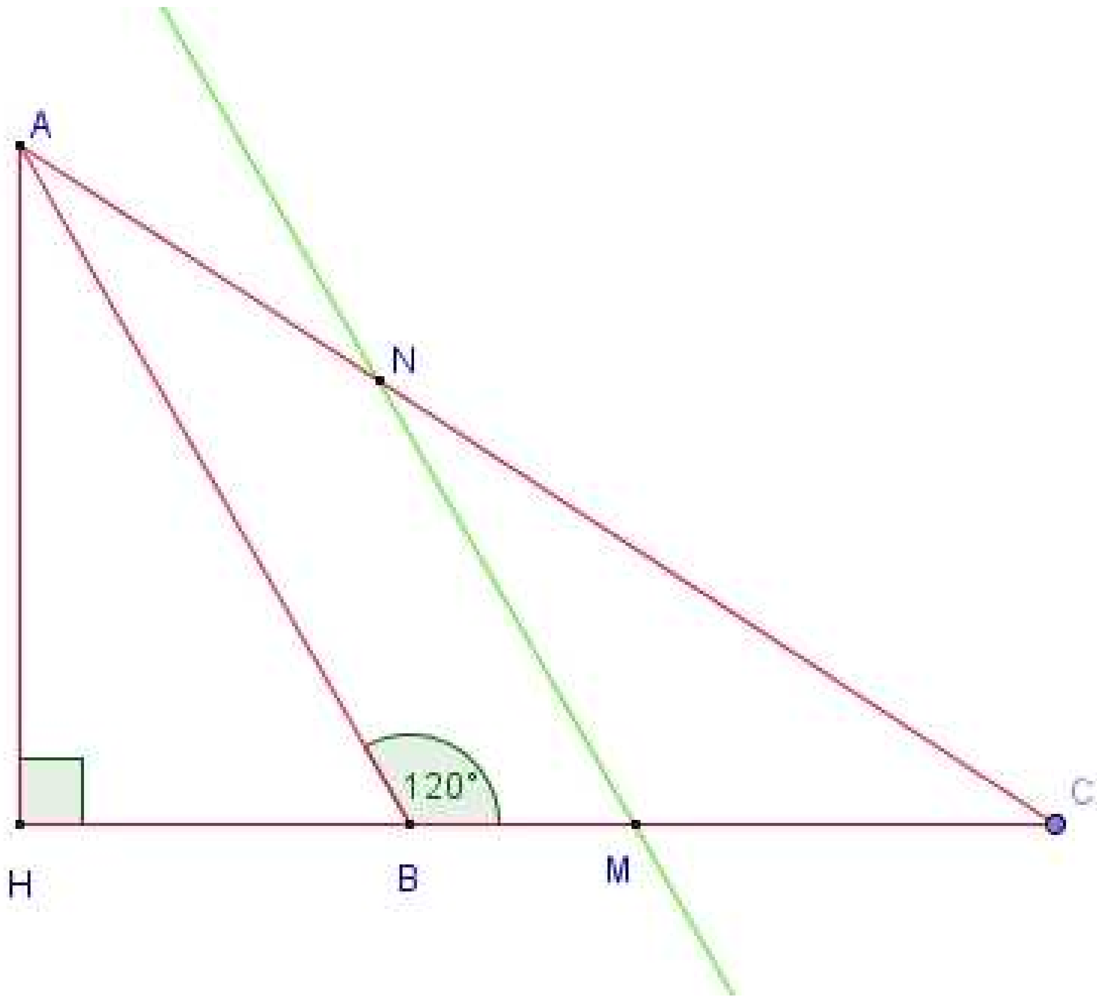
b) On a $P_1 = NM + MC + CN$
$$P_1 = \frac{3x}{5} + x + \frac{7x}{5}$$
$$P_1 = \frac{3x + 5x + 7x}{5}$$
$$P_1 = \frac{15x}{5}$$
$$P_1 = 3x$$

On a $P_2 = AB + BM + MN + NA$

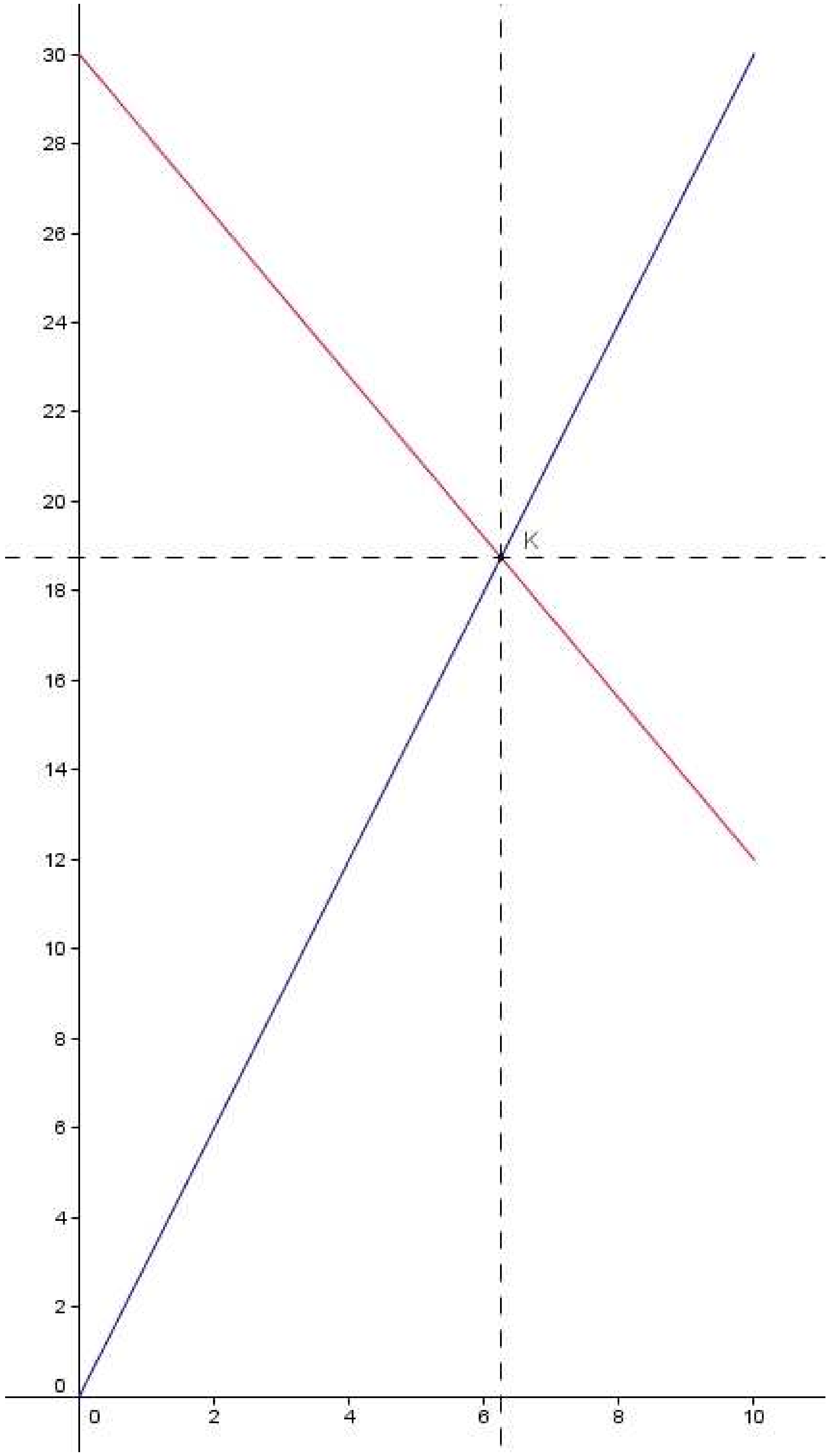
$$P_2 = 6 + 10 - x + \frac{3x}{5} + 14 - \frac{7x}{5}$$

$$P_2 = 30 + \frac{3-5-7}{5x}$$

$$P_2 = 30 - \frac{9x}{5}$$



3) a)



b) A l'aide du graphique, on en déduit que $6 < x_k < 7$ et $18 < y_k < 19$

c) Pour déterminer les valeurs exactes des coordonnées de K, il faut résoudre l'équation : $-\frac{9}{5}x + 30 = 3x$

$$-\frac{9}{5}x + 30 = 3x$$
$$3x + \frac{9}{5}x = 30$$
$$\frac{15x + 9x}{5} = 30$$
$$\frac{24x}{5} = 30$$
$$24x = 150$$
$$x = \frac{150}{24}$$
$$x = \frac{25}{4}$$

On a donc $3x = 3 \times \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$

On a donc $K\left(\frac{25}{4}; \frac{75}{4}\right)$.

d) Pour que le triangle NMC et le trapèze ABMN aient le même périmètre, il faut que $P_1 = P_2$.
Cela est réalisé à l'intersection des deux représentations graphiques, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{25}{4} (= 6,25)$.

Ainsi, lorsque que $x = \frac{25}{4}$, le triangle NMC et le trapèze ABMN ont le même périmètre