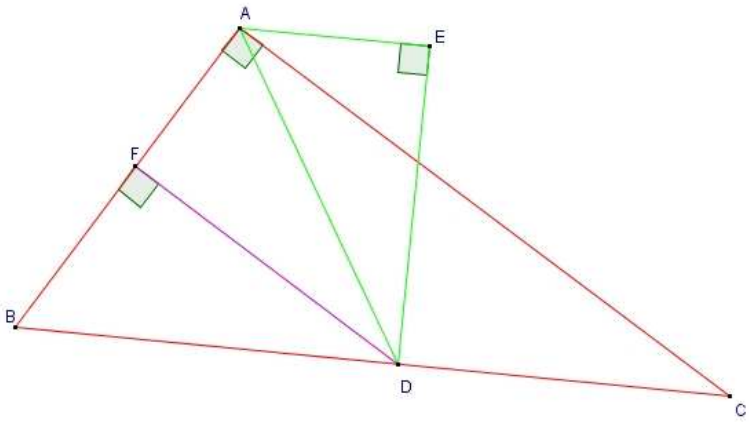
Exercice 1 :

En considérant la figure ci-dessous, déterminer :

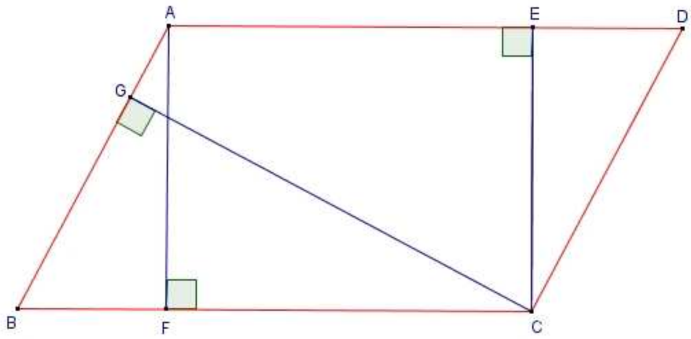
a) la distance de D à (AB)
b) la distance de D à (AE)
c) la distance de C à (AB)
d) la distance de F à (AB)



Exercice 2 :

En considérant la figure ci-dessous, déterminer :

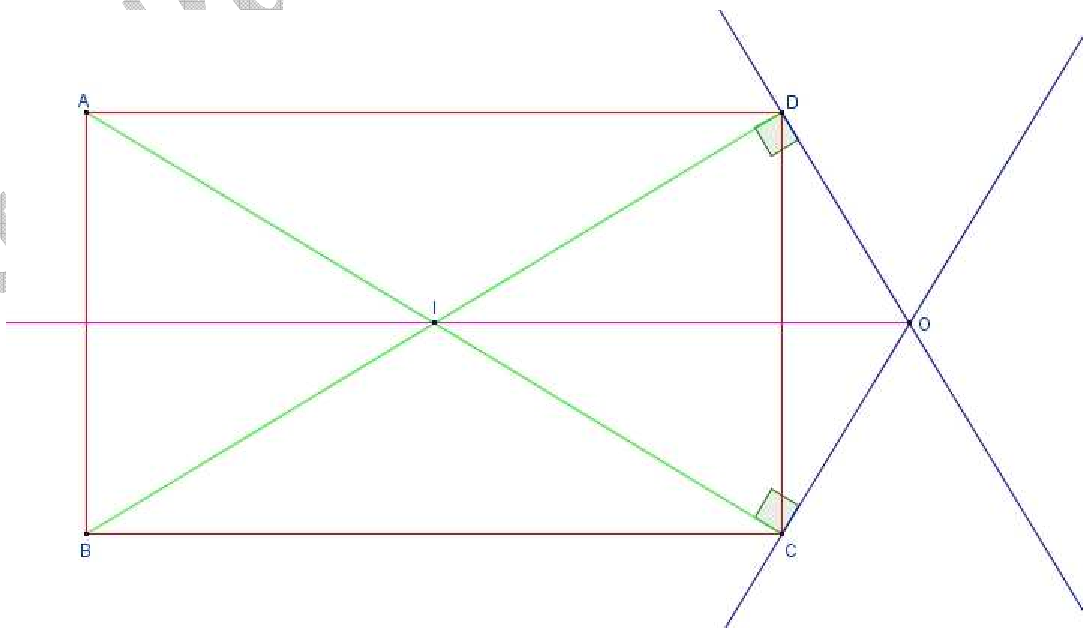
a) la distance de A à (BC)
b) la distance de C à (AB)
c) la distance de C à (AD)
d) la distance de G à (AB)



Exercice 3:

ABCD est un rectangle de centre I.
La perpendiculaire à (AC) en C et la perpendiculaire à (BD) en D se coupent en O.

Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOC}$



R.Flouret

Exercice 4:

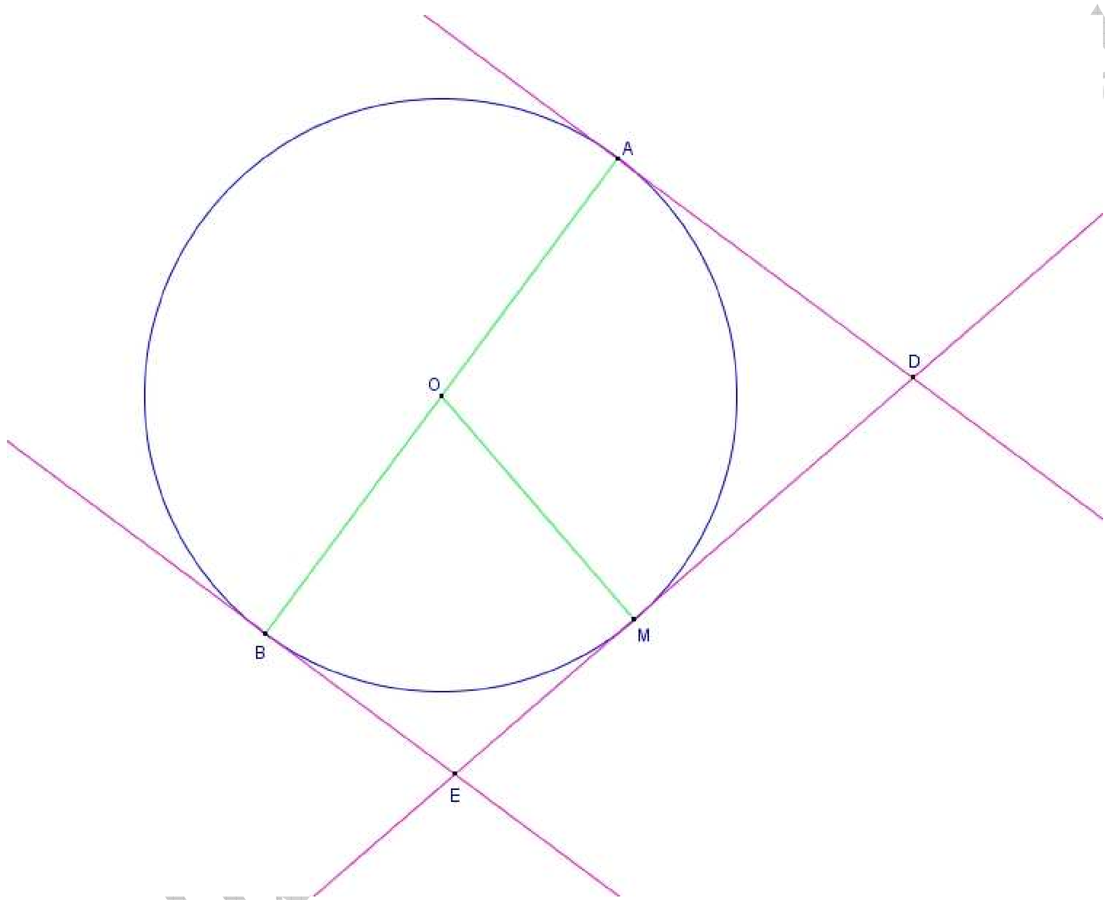
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].

Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B.

Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en M se coupent en D.

Les tangentes à $\mathscr{C}$ en B et en M se coupent en E.

Démontrer que $DE = AD + BE$



Piste :

1) Montrer que (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADM}$ et que (OE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EBM}$.

2) Montrer que (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$ et que (OE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOM}$.

3) Conclure.

R.Flouret

Exercice 5:

LOME est un carré et MOA est un triangle équilatéral.
Le point K est le milieu du segment [OM].
Le point R est le milieu du segment [ME]
Les droites (RK) et (LA) sont sécantes en J.

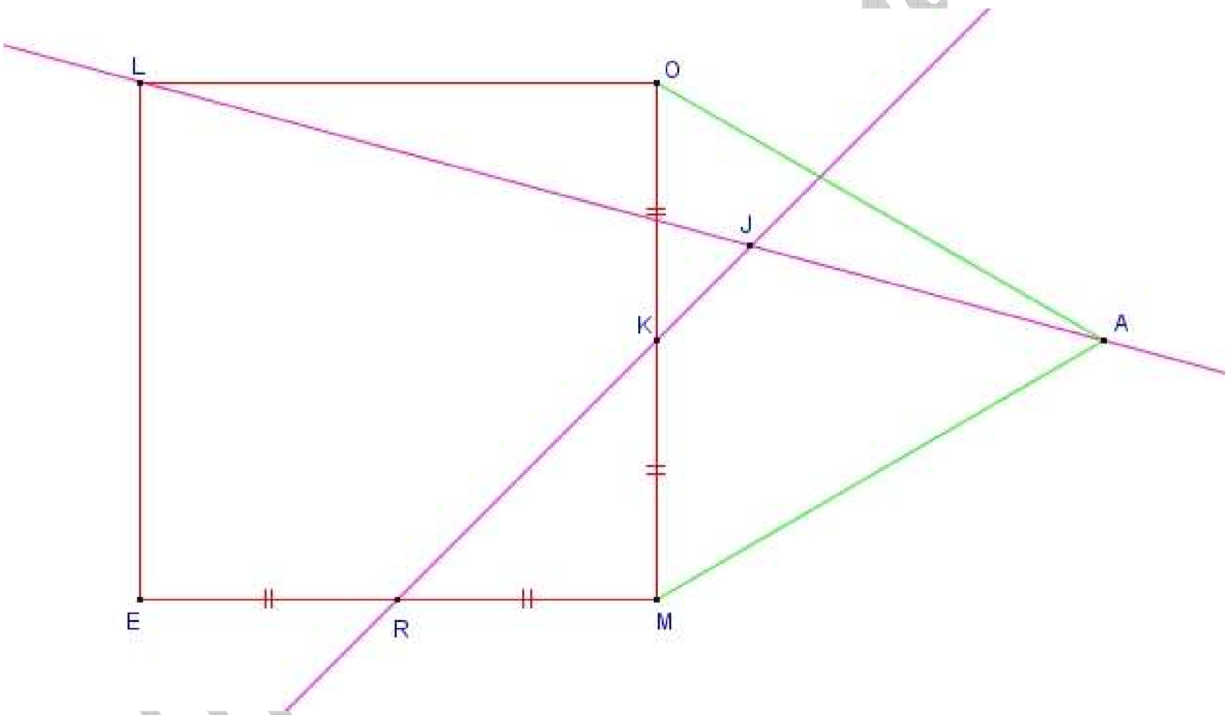
1) a) Calculer $\widehat{OAJ}$

b) En déduire que la droite (AJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OAK}$.

2) a) Calculer $\widehat{KRM}$

b) En déduire que la droite (KJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OKA}$

3) Que peut-on en conclure pour la droite (OJ) ?



Corrigé 1 :

a) On a (DF)$\perp$(AB) et $F \in (AB)$ donc la distance de F à (AB) est la longueur DF.

b) On a (DE)$\perp$(AE) et $E \in (AE)$ donc la distance de D à (AE) est la longueur DE.

c) On a (AC)$\perp$(AB) et $A \in (AB)$ donc la distance de C à (AB) est la longueur AC.

d) $F \in (AB)$ donc la distance de F à (AB) est nulle.

Corrigé 2 :

a) On a (AF)$\perp$(BC) et $F \in (BC)$ donc la distance de A à (BC) est la longueur AF.

b) On a (CG)$\perp$(AB) et $G \in (AB)$ donc la distance de C à (AB) est la longueur CG.

c) On a (CE)$\perp$(AD) et $E \in (AD)$ donc la distance de C à (AD) est la longueur CE.

d) $G \in (AB)$ donc la distance de G à (AB) est nulle.

Corrigé 3 :

ABCD est un rectangle de centre I.
Or si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.
Donc $ID = IC$.

On a (ID)$\perp$(OD) et $D \in (OD)$ donc la distance de I à (OD) est la longueur ID.
On a (IC)$\perp$(OC) et $C \in (OC)$ donc la distance de I à (OC) est la longueur IC.

Or, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.
Donc I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{DOC}$.

On en déduit que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOC}$.

Corrigé 4 :

1) Les tangente à $\mathscr{C}$ en A et en M se coupent en D donc (OA)$\perp$(AD) et (OM)$\perp$(MD)

Les tangentes à $\mathscr{C}$ en B et en M se coupent en E donc (OB)$\perp$(BE) et (OM)$\perp$(ME)

On a (OA)$\perp$(AD) et $A \in (AD)$ donc la distance de O à (AD) est la longueur OA.

On a (OM)$\perp$(MD) et $M \in (MD)$ donc la distance de O à (MD) est la longueur OM.

De plus, A et M appartiennent au cercle de centre O donc $OA = OM$

Or, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Donc O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ADM}$.

Ainsi, (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADM}$.

On a (OB)$\perp$(BE) et $B \in (BE)$ donc la distance de O à (BE) est la longueur OB.
On a (OM)$\perp$(ME) et $M \in (ME)$ donc la distance de O à (ME) est la longueur OM.

De plus, B et M appartiennent au cercle de centre O donc $OB = OM$.
Or, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Donc O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BEM}$.

Ainsi, (OE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BEM}$.

2) (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADM}$.
Or la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc $\widehat{ADO}=\widehat{ODM}$

OAD est un triangle rectangle en A.
Or, dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

Donc $\widehat{AOD}+\widehat{ADO}= 90°$

$\widehat{AOD}=90°-\widehat{ADO}$

OMD est un triangle rectangle en M.
Or, dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

Donc $\widehat{ODM}+\widehat{MOD}=90°$

$\widehat{MOD}=90°-\widehat{ODM}$

Or $\widehat{ADO}=\widehat{ODM}$

Donc $\widehat{MOD}=90°-\widehat{ADO}$

Ainsi, $\widehat{MOD}=\widehat{AOD}$

Or la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$

On montre exactement de la même manière que (OE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BOM}}$.

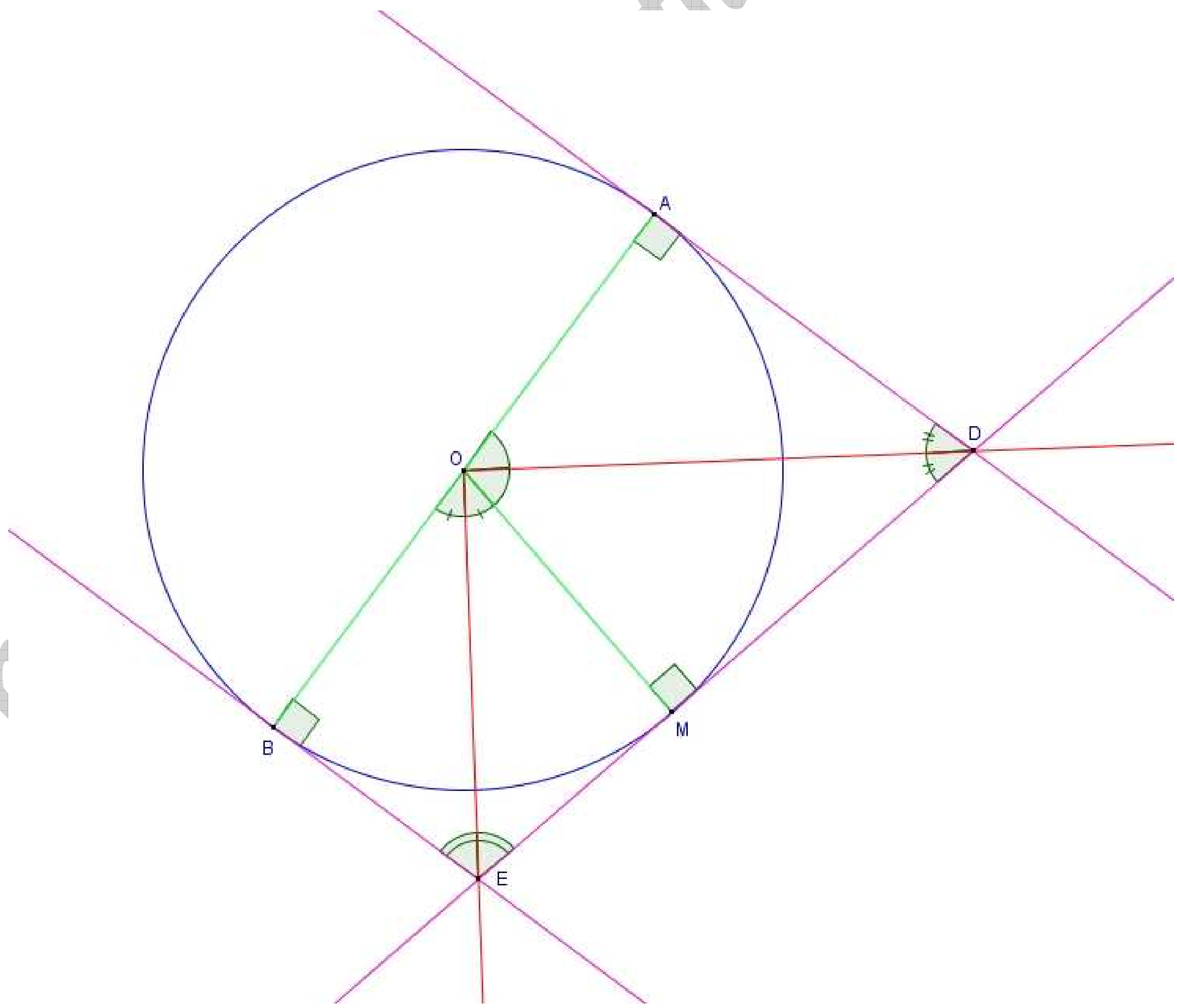
3) On a (OA)$\perp$(AD) et $A \in (OA)$ donc la distance de D à (OA) est la longueur AD.
On a (OM)$\perp$(MD) et $M \in (OM)$ donc la distance de D à (OM) est la longueur DM.

De plus, D appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOM}}$
Or, si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à égale distance des côtés de cet angle.
Donc $AD = DM$

On a (OB)$\perp$(BE) et $B \in (OB)$ donc la distance de E à (OB) est la longueur BE.
On a (OM)$\perp$(ME) et $M \in (OM)$ donc la distance de E à (OM) est la longueur ME.

De plus, E appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BOM}}$.
Or, si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à égale distance des côtés de cet angle.
Donc $BE = ME$

$M \in [DE]$ donc $DE = DM + ME$
Or $AD = DM$ et $BE = ME$
Donc $DE = AD + BE$



Corrigé 5 :

1) a) LOME est un carré donc $\widehat{LOM} = 90°$

MOA est un triangle équilatéral.

Or, si un triangle est équilatéral, alors ses angles ont pour mesure 60°.

Donc $\widehat{MOA} = 60°$

On en déduit que $\widehat{LOA} = \widehat{LOM} + \widehat{MOA}$

$\widehat{LOA} = 90° + 60°$

$\widehat{LOA} = 150°$

Le triangle OLA est isocèle en O

Or, si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.

Donc $\widehat{OLA} = \widehat{OAL}$

De plus, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°

Donc $2\widehat{OAL} + \widehat{LOA} = 180°$

$\widehat{OAL} = \dfrac{180° - 150°}{2}$

$\widehat{OAL} = 15°$

De plus, $J \in [AL]$

Donc $\widehat{OAJ} = 15°$

b) Dans le triangle MOA, K est le milieu de [OM].

D'après la définition d'une médiane, on en déduit que (AK) est la médiane issue de A.

De plus, le triangle MOA est équilatéral donc $\widehat{OAM} = 60°$ et (AK) est aussi la bissectrice issue de $\widehat{OAM}$.

Or la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc $\widehat{OAK} = \dfrac{\widehat{OAM}}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

On a donc $\widehat{JAK} = \widehat{OAK} - \widehat{OAJ} = 30° - 15° = 15°$.

Ainsi, $\widehat{JAK} = \widehat{OAJ}$

Or la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc (AJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OAK}$.

2) a) KRM est un triangle isocèle en M

Or, si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.

Donc $\widehat{KRM}=\widehat{RKM}$

De plus, KRM est un triangle rectangle en M.

Or, si un triangle est rectangle, alors ses angles aigus sont complémentaires.

Donc $\widehat{KRM}+\widehat{RKM}=90°$

$2\widehat{KRM}=90°$

$\widehat{KRM}=\dfrac{90°}{2}=45°$

b) On déduit de la question précédente que $\widehat{RKM}=90°$

$\widehat{RKM}$ et $\widehat{OKJ}$ sont des angles opposés par le sommet.

Or deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.

Donc $\widehat{OKJ}=45°$

De plus, $\widehat{OKJ}+\widehat{JKA}=90°$

Donc $\widehat{JKA}=90°-\widehat{OKJ}$

$\widehat{JKA}=90°-45°$

$\widehat{JKA}=45°$

On a donc $\widehat{OKJ}=\widehat{JKA}$

Or la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc (KJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OKA}$

3) Dans le triangle OKA, (KJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OKA}$ et (AJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OAK}$.

Or les bissectrices d'un triangle sont concourantes

Donc J est le point de concours des bissectrices.

Ainsi, (OJ) est la troisième bissectrice du triangle OKA.