Partie I :

1) Le premier de changement de couleur a lieu au plus tôt au second tirage donc X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\,;1\}$.

2) $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\}$, $(X = k)$ signifie que le premier changement de couleur a eu lieu au k-ième tirage.

Avant le k-ième tirage, les boules avaient toutes la même couleur : rouge, blanche ou verte.

On a donc : $(X = k) = (B_1 \bigcap B_2 ... \bigcap B_{k-1} \bigcap \overline{B_k}) \bigcup (R_1 \bigcap R_2 ... \bigcap R_{k-1} \bigcap \overline{R_k}) \bigcup (V_1 \bigcap V_2 \bigcap ... \bigcap V_{k-1} \bigcap \overline{V_k})$

Les trois évènements entre parenthèses étant incompatibles, on en déduit que :

$P(X = k) = P(B_1 \bigcap B_2 ... \bigcap B_{k-1} \bigcap \overline{B_k}) + P(R_1 \bigcap R_2 ... \bigcap R_{k-1} \bigcap \overline{R_k}) + P(V_1 \bigcap V_2 ... \bigcap V_{k-1} \bigcap \overline{V_k})$.

De plus, la formule des probabilités composées nous donne :

$P(B_1 \bigcap B_2 ... \bigcap B_{k-1} \bigcap \overline{B_k}) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times ... \times P_{B_1 \bigcap ... \bigcap B_{k-1}}(\overline{B_k}) = b \times b. \times .. \times (1-b) = b^{k-1}(1-b)$.

On obtient un résultat similaire pour les boules rouges et vertes.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\}$, $P(X = k) = (1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}$.

3) La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 2} kP(X = k)$ converge absolument.

Tous les termes étant positif, cela revient à étudier la convergence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} kP(X = k) &= \sum_{k=2}^{N} k[(1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}] \\
&= \frac{1-b}{b} \sum_{k=2}^{N} kb^k + \frac{1-r}{r} \sum_{k=2}^{N} kr^k + \frac{1-v}{v} \sum_{k=2}^{N} kv^k \\
&= \frac{1-b}{b}\left(\frac{b}{(1-b)^2} - 0 - b\right) + \frac{1-r}{r}\left(\frac{r}{(1-r)^2} - 0 - r\right) + \frac{1-v}{v}\left(\frac{v}{(1-v)^2} - 0 - v\right)
\end{aligned}$$

(La convergence est due au fait que $|b| < 1, |r| < 1$ et $|v| < 1$)

Après quelques calculs et simplifications, on obtient $E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$.

Partie II :

1) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$.

2) f est susceptible de posséder un extremum local sur $]0;1[\times]0;1[$ si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

On a : $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}=0\\ \frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{(1-y)^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)^2=(x+y)^2\\ (1-y)^2=(x+y)^2\end{cases}$.

$\forall(x,y)\in\,]0;1[\times]0;1[$, on a $1-x>0, 1-y>0$ et $x+y>0$. Le sytème équivaut donc à :

$\begin{cases}1-x=x+y\\ 1-y=x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=1\\ 2y+x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-2x\\ -3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$

L'unique point I de $]0;1[\times]0;1[$ en lequel f est susceptible d'admettre un extremum local est $I(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

3) On a :

- $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}$
- $s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3}$
- $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2}{(1-y)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}$.

En $I(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, on a $r=\frac{27}{2}$, $s=\frac{27}{4}$ et $t=\frac{27}{2}$.

Ainsi, $rt-s^2=27^2(\frac{1}{4}-\frac{1}{16})>0$ donc f admet un extremum local en I.

De plus, $r>0$ donc il s'agit d'un minimum local.

4) a) Comme $1-v=b+r$, on a $E(X)=f(b,r)-2$

b) $E(X)$ est minimale lorsque $b=r=v=\frac{1}{3}$. C'est donc là qu'on aura « en moyenne » le plus tôt le premier changement de couleur.

Partie III :

1) $\int_2^M \frac{1}{3^t}dt = \int_2^M e^{-t\ln(3)}dt = \left[\frac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_2^M = \frac{-1}{\ln(3)}e^{-M\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)}e^{-2\ln(3)} \xrightarrow{M\to+\infty} \frac{1}{\ln(3)}e^{-2\ln(3)} = \frac{1}{9\ln(3)}$.

Ainsi, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$ converge et vaut $\frac{1}{9\ln(3)}$.

2) • g est positive sur $\mathbb{R}$

• g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}dt = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$

g est donc bien une densité de probabilité.

3) • $\int_{-\infty}^2 tg(t)dt = \int_{-\infty}^2 t\times 0dt = 0$

$\int_2^M tg(t)dt = \int_2^M te^{-t\ln(3)}dt = \left[-\frac{t}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_2^M + \int_2^M \frac{1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}dt$ (par intégration par parties)

$$= -\frac{M}{3^M\ln(3)} + \frac{2}{3^2\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)}\left(\frac{-1}{3^M\ln(3)} + \frac{1}{3^2\ln(3)}\right) \xrightarrow{M\to+\infty} \frac{2\ln(3)+1}{9(\ln(3))^2}$$

On en déduit que $E(Y) = 9\ln(3)\times\frac{2\ln(3)+1}{9(\ln(3))^2} = 2 + \frac{1}{\ln(3)}$.

4) a) $\mathbb{Z}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\,;1\}$.

$\forall k \geq 2,\ P(Z=k) = P(k \leq Y < k+1) = \int_k^{k+1} g(t)dt.$

Or $\int_k^{k+1} g(t)dt = 9\ln(3)\int_k^{k+1} e^{-t\ln(3)}dt = 9\ln(3)\left[\frac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+1} = 9\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^k$

b) Pour $b = r = v = \frac{1}{3}$, on a $\forall k \geq 2,\ P(X=k) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}(1-\frac{1}{3}) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^k = P(Z=k)$.

Ainsi, dans ce cas, X et Z ont la même loi de probabilité.