Dossier du 11 Juillet 2007

Thème : Fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que les restrictions de f à chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[4; +\infty[$ sont des fonctions affines.
3) Montrer que sur $[0; 4]$ la représentation graphique de f est un arc de cercle qu'on caractérisera.
4) Tracer (C_f).
5) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Montrer que la courbe (C_f) possède un axe de symétrie.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) Sa réponse à la question Q.2).

(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

11 juillet, Dossier 12 : Fonctions
(extraits du programme : Seconde, Première S, Terminale S)

L'exercice a révélé chez les candidats des lacunes inattendues : l'utilisation intempestive du discriminant, du tableau de signe pour une fonction polynôme de degré 2, du changement de repère pour l'étude d'une symétrie. De même on constate de regrettables imprécisions de langage : expression d'une fonction et équation de sa courbe, confusion entre f et f(x), entre f et C_f , entre tangent et asymptote. La question 5) a été abordée par très peu de candidats.

1) On a $16x^2 - 8x^3 + x^4 = x^2(x^2 - 8x + 16) = x^2(x-4)^2$

On peut donc réécrire f(x) sous la forme $f(x) = \sqrt{4 + |x||x-4|}$
f est donc bien définie sur R.
A partir de la dernière expression de f, on montre facilement que la droite d'équation x=2 est un axe de symétrie.

2) $f_{|]-\infty;0]}(x) = \sqrt{4 + (-x)(4-x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x-2| = 2 - x$
$f_{|[4;+\infty[}(x) = \sqrt{4 + x(x-4)} = |x-2| = x - 2$

3) $f_{|[0;4]}(x) = \sqrt{4 + x(4-x)} = \sqrt{-x^2 + 4x + 4} = \sqrt{8 - (x-2)^2}$

On en déduit donc que sur [0 ; 4], la représentation graphique de f est un arc de cercle de centre (2 ;0) de rayon $2\sqrt{2}$ d'extrémités (0 ; 2) et (4 ; 2) et situé dans le demi-plan supérieur.

4) et 5) On a $\int_{-2}^{6} f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3$

Les triangles ABC et A'B'C sont des triangles rectangles isocèles. On a : $A_1 = A_3 = \frac{4\times 4}{2} = 8$

Calculer A_2 revient à calculer l'aire d'un quart de cercle de rayon $2\sqrt{2}$. On a donc $A_2 = \frac{(2\sqrt{2})^2\pi}{4} = 2\pi$

On en déduit que : $\int_{-2}^{6} f(x)dx = 16 + 2\pi$ u.a