Dossier du 1er juillet 2008

Thème : Arithmétique.

1. L'exercice proposé au candidat

On appelle diviseur propre d'un entier naturel non nul n, tout diviseur de n qui soit positif et distinct de n. Tout entier naturel non nul égal à la somme de ses diviseurs propres est dit nombre parfait. Exemple : 6 est un nombre parfait car il est égal à la somme de ses diviseurs propres soit 1, 2 et 3.

1) Établir la liste des diviseurs de 28 et 496 et montrer que ce sont deux nombres parfaits.
2) Vérifier que 28 et 496 sont de la forme $2^n(2^{n+1}-1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{n+1}-1$ premier.
3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $2^{n+1}-1$ est premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est parfait.
4) Illustrer par un exemple le fait que si $2^{n+1}-1$ n'est pas premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ n'est pas parfait.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quels sont les outils nécessaires à la résolution de l'exercice ?

Q.2) Rédiger la réponse à la question 3.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Arithmétique** » mettant en jeu des propriétés de certains nombres entiers.

1er juillet 2008, Dossier 4 : Arithmétique

Le dossier traite des nombres parfaits et établit une forme remarquable de ces nombres dans le cas pair (réciproque non traitée). Contrairement à ce que nous aurions pu penser, ce dossier a présenté quelques difficultés aux candidats. L'intitulé sur le thème « arithmétique mettant en jeu les propriétés de certains nombres premiers » a gêné les candidats. Bien qu'étant un sujet facile ce thème montre une confusion fréquente dans l'utilisation des outils arithmétiques de ce niveau (en particulier l'utilisation de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers). On constate que tous les candidats ne sont pas capables de décrire les diviseurs d'un entier connaissant sa décomposition en facteurs premiers.
Dans l'ensemble les candidats savent traiter l'exercice proposé par le jury, mais peu prennent suffisamment de recul pour savoir avec précision les notions mises en jeu (par exemple ils ne perçoivent souvent pas que lorsque $2^{n+1}-1$ est premier alors $2^n(2^{n+1} - 1)$ est une décomposition en facteurs premiers). Les exercices proposés sont variés mais parfois mal écrits. Là encore, la perception qu'ont les candidats des théorèmes d'arithmétique est rarement très fine.

1) Les diviseurs de 28 sont 1,2,4,7,14,28.
Les diviseurs de 496 sont 1,2,4,8,16,31,62,124,248,496

On a 1+2+4+7+14=28 et 1+2+4+8+16+31+62+124+248=496

28 et 496 sont donc des nombres parfaits.

2) $28 = 2^2(2^3 - 1)$ et $496 = 2^4(2^5 - 1)$ et 7 et 31 sont bien des nombres premiers.

3) Supposons que $2^{n+1} - 1$ soit premier.

Les diviseurs propres de $2^n(2^{n+1} - 1)$ sont :
- $2^k, 0 \leq k \leq n$
- $2^k(2^{n+1} - 1), 0 \leq k \leq n-1$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n} 2^k + (2^{n+1} - 1)\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + (2^{n+1} - 1)\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

donc si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors $2^n(2^{n+1} - 1)$ est parfait.

Remarque : Soit N= $2^n(2^{n+1} - 1)$. Cette écriture est la décomposition de N en produit de facteurs premiers car $2^{n+1} - 1$ est premier.

4) Il suffit de prendre n=3.