## Exercice 1 :

Résoudre dans C : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0$

## Exercice 2 :

Résoudre dans C : $e^{2z}=1+i\sqrt{3}$

## Exercice 3 :

Calculer pour tout $n\in N$ et tout $x\in R$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

## Exercice 4 :

Calculer $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$

## Exercice 5 :

Montrer que : $1+\cos(\frac{2\pi}{n})+\cos(\frac{4\pi}{n})+...+\cos(\frac{2(n-1)\pi}{n})=0$

## Exercice 6 :

Calculer $\forall n\in N, n\geq 2$ et tout $x\in R/\cos(x)\neq 0$ $S_n=2+\frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)}+...+\frac{\cos(nx)}{\cos^n(x)}$

## Exercice 7 :

Calculer le module et l'argument de $z=\frac{a+b}{1-ab}$, où $a=e^{i\alpha}$ et $b=e^{i\beta}$ ,avec $\alpha$ et $\beta$ réels.

## Exercice 8 :

Soit $\theta$ réel, $0\leq\theta\leq\pi$ et $z=-\sin(2\theta)+2i\cos^2(\theta)$. Déterminer les module et argument de z. Déterminer $\theta$ pour que z et z-1 aient le même module.

## Exercice 9 :

Etant donné $z\in C\setminus\{2i\}$, on considère $Z=\frac{z+i}{z-2i}$.

1) Déterminer l'ensemble $(E_1)$ des images des nombres z tels que Z soit réel.
2) Déterminer l'ensemble $(E_2)$ des images des nombres z tels que Z soit imaginaire pur.
3) Déterminer l'ensemble $(E_3)$ des images des nombres z tels que Z ait $\frac{\pi}{2}$ pour argument.

R.Flouret

## Corrigé 1 :

On pose $Z=\frac{z-i}{z+i}$ et on utilise le fait que $1+Z+Z^2+Z^3=\frac{1-Z^4}{1-Z}$ (Z=1 est impossible ici).
Il faut donc résoudre $Z^4=1$. On en déduit les différents cas :

- $Z=-1 \Rightarrow z=0$
- $Z=i \Rightarrow z=-1$
- $Z=-i \Rightarrow z=1$

L'ensemble des solutions est donc $S=\{-1,0,1\}$

## Corrigé 2 :

En posant z=x+iy, on a $e^{2x}e^{2iy}=1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

On obtient donc $e^{2x}=2$ et $2y\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ c'est-à-dire $z\in\left\{\frac{\ln 2}{2}+i\pi(\frac{1}{6}+n), n\in Z\right\}$

## Corrigé 3 :

Si x n'est pas congru à 0 modulo $2\pi$, on a :

$$Z_n=S_n+iT_n=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a :

$$S_n=\cos(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \text{ et } T_n=\sin(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Si x est congru à 0 modulo $2\pi$, on a $S_n=n+1$ et $T_n=0$

## Corrigé 4 :

Si $\alpha$ n'est pas congru à 0 modulo $2\pi$, on a :

$$C_n+iS_n=\sum_{k=0}^{n}e^{i(x+k\alpha)}=e^{ix}\sum_{k=0}^{n}(e^{i\alpha})^k$$

L'exercice précédent nous donne $C_n+iS_n=e^{ix}e^{i\frac{n\alpha}{2}}\frac{\sin(\frac{(n+1)\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}=e^{i(x+\frac{n\alpha}{2})}\frac{\sin(\frac{(n+1)\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$

En séparant partie réelle et imaginaire, on a :

$$C_n=\cos(x+\frac{n\alpha}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \text{ et } S_n=\sin(x+\frac{n\alpha}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

R.Flouret

Si $\alpha$ est congru à 0 modulo $2\pi$ , on a :
$C_n + iS_n = (n+1)e^{ix}$ d'où $C_n = (n+1)\cos x$ et $S_n = (n+1)\sin x$

## Corrigé 5 :

C'est la partie réelle de : $1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + ... + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \dfrac{1 - e^{i\frac{2n\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$

Notre somme est donc la partie réelle du complexe 0, qui est…0 !

## Corrigé 6 :

On a $S_n = 1 + \dfrac{\cos x}{\cos^1 x} + \dfrac{\cos(2x)}{\cos^2(x)} + ... + \dfrac{\cos(nx)}{\cos^n(x)}$

- Si x est congru à 0 modulo $2\pi$ , alors $S_n = n+1$
- Si x est congru à $\pi$ modulo $2\pi$ , alors $\cos^p x = \cos(px) = (-1)^p$ donc tous les termes de la somme valent encore 1 et $S_n = n+1$
- Sinon on pose $z = \dfrac{e^{ix}}{\cos x}$ et comme $\sin x \neq 0$, on a $z \neq 1$.

$S_n$ est la partie réelle de $\sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1-z}$. On a alors l'égalité :

$\dfrac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} \times \dfrac{1}{\cos^n x} = \dfrac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{-i\sin x \cos^n x}$ .Sa partie réelle est : $S_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$

## Corrigé 7 :

z a un sens pour $ab \neq 1$, donc lorsque $\alpha + \beta$ n'est pas un multiple de $2\pi$ . On écrit :

$a + b = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$.

Aussi, $1 - ab = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}) = -2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$.

En effectuant le rapport, on en déduit que $z = \dfrac{a+b}{1-ab} = i\dfrac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$

## Corrigé 8 :

On a $z = 2i\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$ . Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}, z = 0$ . Dans la suite, on prend $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ .Il vient pour $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}, |z| = 2\cos\theta$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + \theta$ et pour $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, |z| = -2\cos\theta$ et $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} + \theta$ .

R.Flouret

z et z-1 ont même module $\Leftrightarrow z\bar{z}=(z-1)(\bar{z}-1)$, soit $z+\bar{z}=1$, ou encore $-2\sin 2\theta=1$,ce qui, avec $0\leq\theta\leq\pi$ donne $\theta=\frac{11\pi}{12}$ ou $\theta=\frac{7\pi}{12}$.

## Corrigé 9 :

1) $Z=\overline{Z}$ se lit $(z+i)(\bar{z}+2i)=(\bar{z}-i)(z-2i), z\neq 2i$ soit $z+\bar{z}=0, z\neq 2i$ ,c'est-à-dire z imaginaire pur différent de 2i. L'ensemble $(E_1)$ est donc l'axe des ordonnées, sauf le point (0,2).

2) $Z+\overline{Z}=0$ se lit $(z+i)(\bar{z}+2i)+(\bar{z}-i)(z-2i)=0, z\neq 2i$, soit $2z\bar{z}-4+i(z-\bar{z})=0, z\neq 2i$ c'est-à-dire $x^2+y^2-y-2=0,(x,y)\neq(0,2)$, ou encore : $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4},(x,y)\neq(0,2)$.

$(E_2)$ est donc le cercle C de centre $A=(0,\frac{1}{2})$, de rayon $\frac{3}{2}$ privé du point $B=(0,2)$

3) $\arg Z=\frac{\pi}{2}$ équivaut à $\operatorname{Re}Z=0$ et $\operatorname{Im}Z>0$

On a $Z=\frac{(z+i)(\bar{z}+2i)}{|z-2i|^2}=\frac{x^2+y^2-y-2+3ix}{|z-2i|^2}$

$(E_3)$ est donc caractérisé par $x^2+y^2-y-2=0$ et $x>0$. C'est donc la partie de C constituée des points d'abscisses strictement positives.