Exercice 1 :

Montrer que la suite de terme général $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+e^{-k})$ est convergente.

Exercice 2 :

Etudier la convergence de la suite (u_n) telle que : $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

Exercice 3 :

Etudier les suites $(u_n)_{n\in N^*}$ et $(v_n)_{n\in N^*}$ définies par : $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k\times k!})$ et $v_n = u_n(1+\frac{1}{n\times n!})$

Exercice 4 :

Un segment [AB] a pour longueur a. On appelle M_1 le milieu de [AB], M_2 le milieu de [B M_1], M_3 le milieu de [M_1 M_2] etc…

1) Calculer la longueur de [A M_n] en fonction de n
2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} AM_n$.

Exercice 5 :

Montrer que pour tout entier n, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que $(\sin(\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n))_{n\in N}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 :

Etant donné $a > 0$, on considère une fonction strictement positive sur $[0;a]$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = l \geq 0$.

Montrer que la suite de terme général : $\sqrt[n]{n!\, f(a)\, f(\frac{a}{2})\ldots f(\frac{a}{n})}$ admet al pour limite.

Exercice 7 :

Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls, avec $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$. $\forall n\in N^*$, on pose $P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$

1) Montrer que P_n admet une unique racine strictement positive. On note u_n cette racine.
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 :

1) Soit $n\in N^*$. Montrer que le polynôme P_n défini par : $P_n(x) = x^n + x - 1$ admet une unique racine sur $]0;1[$

On notera α_n cette racine.

2) Etudier la suite (α_n).

R.Flouret

Corrigé 1 :

(u_n) est croissante car $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + e^{-(n+1)} > 1$.

Comme $u_n > 0$, on peut considérer $v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-k})$.

Or $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \ln(1+x) \leq x$ donc $v_n \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \leq \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que $u_n = e^{v_n} \leq e^{\frac{e}{e-1}}$.

(u_n) est donc croissante et majorée. Elle converge.

Corrigé 2 :

On a $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + ... + \frac{1}{n!}$. Or $\forall k \in [[1; n-2]], \frac{1}{n(n-1)...(n-k)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. On en déduit donc que $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$. Par passage à la limite, on obtient $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Corrigé 3 :

Pour $n \geq 2$, $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{n \times n!} > 1$ donc (u_n) est croissante (clairement $\forall n \in N^*, u_n > 0$)

Pour $n \geq 1$, en se servant du résultat établi juste avant, on a $\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n \times n!})^2}{1 + \frac{1}{(n-1)(n-1)!}}$

Pour comparer à 1 ce quotient de réels positifs, étudions la différence entre le dénominateur et le numérateur.

$$\frac{1}{(n-1)(n-1)!} - \frac{2}{n \times n!} - \frac{1}{n^2(n!)^2} = \frac{n \times n!(n^2 - 2n + 2) - (n-1)}{n^2(n-1)(n!)^2} \geq \frac{n \times n! - (n-1)}{n^2(n-1)(n!)^2} > 0.$$

On en déduit donc que $\frac{v_n}{v_{n-1}} < 1$ et donc que (v_n) est décroissante.

Comme $v_n - u_n = \frac{u_n}{n \times n!} \geq 0$, on en déduit que $\forall n \in N^*, u_n \leq v_n$.

Ainsi, $\forall n \in N^*, 0 < u_n \leq v_n \leq v_1$ donc $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1}{n \times n!}$ d'où $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Les 2 suites sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.

Corrigé 4 :

1) En faisant un dessin, on se rend compte que $AM_1 = \frac{a}{2}, AM_2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2}, AM_3 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} - \frac{a}{2^3}$ et

$\forall n \geq 3, AM_n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} - \frac{a}{2^3} + ... + \frac{(-1)^n a}{2^n} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2}(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{(-2)^{n-2}})$.

R.Flouret

Or $1-\frac{1}{2}+...+\frac{1}{(-2)^{n-2}}=\frac{1-(\frac{-1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}$ d'où $AM_n=\frac{a}{2}+\frac{a}{6}(1-(\frac{-1}{2})^{n-1}$

2) Immédiatement, $\lim\limits_{n\to+\infty} AM_n=\frac{2}{3}a$

Corrigé 5 :

Par la formule du binôme de Newton, on a :

$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k+\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k(-1)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k(1+(-1)^k)=2\sum\limits_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}C_n^{2k}2^{n-2k}3^k\in 2N$

Posons $2\varphi_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$.

On a alors $\sin(\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n)=\sin(\frac{\pi}{2}(2\varphi_n-(2-\sqrt{3})^n))=(-1)^{\varphi_n+1}\sin(\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n)$

Or $0<2-\sqrt{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n)=0$

Corrigé 6 :

Soit $u_n=\sqrt[n]{n!\,f(a)f(\frac{a}{2})...f(\frac{a}{n})}$. On a alors $\ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(kf(\frac{a}{k}))$.

On a $nf(\frac{a}{n})=a\frac{f(\frac{a}{n})}{\frac{a}{n}}$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nf(\frac{a}{n})=al\geq 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(nf(\frac{a}{n}))=\ln(al)$

Le théorème de Césaro nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln(al)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=al$

Corrigé 7 :

1) Pour tout réel x,on a $P'_n(x)=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}ka_k x^{k-1}$.Tous les termes de la suite (a_n) étant positifs,avec $a_1>0$, on en déduit que $\forall x\geq 0, P'_n(x)>0$. La fonction polynôme P_n est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$
De plus, $P_n(0)=-a_0<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}P_n(x)=+\infty$ car pour $x\geq 0, P_n(x)\geq a_1x-a_0$.
On en déduit que P_n réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-a_0;+\infty[$ et il s'ensuit que P_n admet une unique racine positive.

2) On a $P_{n+1}(x)=a_{n+1}x^{n+1}+P_n(x)$ d'où $P_{n+1}(u_n)=a_{n+1}u_n^{n+1}+P_n(u_n)=a_{n+1}u_n^{n+1}\geq 0$. Comme P_{n+1} est une bijection strictement croissante sur R^+, de $P_{n+1}(u_{n+1})=0$ et $P_{n+1}(u_n)\geq 0$, on en déduit que $u_{n+1}\leq u_n$ puis que (u_n) est décroissante. Cette suite étant aussi minorée par 0, elle est donc convergente.

R.Flouret

Corrigé 8 :

1) La fonction $P_n : [0;+\infty[\to R$ telle que $P_n(x) = x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante.
Comme $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 1$, il vient que P_n admet une unique racine α_n et que $\alpha_n \in]0;1[$.

2) On a $\alpha_n^n + \alpha_n - 1 = 0$ donc $n\ln(\alpha_n) = \ln(1-\alpha_n)$.

Etudions la fonction $f :]0;1[\to R$ telle que $f(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(t)}$.

Les 2 fonctions $t \to \ln(1-t)$ et $t \to \dfrac{1}{\ln(t)}$ sont négatives et strictement décroissantes sur $]0;1[$. Leur produit est donc une fonction positive et strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
f réaliste donc une bijection de $]0;1[$ sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, $n = f(\alpha_n)$ s'écrit $\alpha_n = f^{-1}(n)$. Il reste à remarquer que f^{-1} est strictement croissante et de limite 1 en $+\infty$ pour obtenir que α_n est strictement croissante et de limite 1.