Exercice 1 :

Pour tout $x \in R$ et tout $n \in N^*$, montrer les relations :
a) $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$

b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$

Exercice 2 :

Etant donné x réel, étudier la suite de terme général $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx), n \geq 1$

Exercice 3 :

1) Montrer que pour tout x réel, $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$

2) En déduire $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n+2^k}{2^{k+1}})$ où n est en entier naturel donné.

Exercice 4 :

Pour tout $x \in R$ et tout $n \in N^*$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$

Exercice 5 :

Calculer $\lim_{x \to 1}(x + E(x))$

Exercice 6 :

Etudier la continuité en $x_0 \in R$ de $f : x \to E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Exercice 7 :

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} E(\frac{b}{x})$ et $\lim_{x \to 0} \frac{b}{x} E(\frac{x}{a})$

Exercice 8 :

Etudier la fonction $f : x \to xE(\frac{1}{x})$ (On fera l'étude sur R $_+$)

Exercice 9 : (CAPES 2002)

Montrer que $E(\frac{x}{ab}) = E(\frac{1}{b}E(\frac{x}{a}))$, $x \in R$, a et b dans N^*

R.Flouret

Corrigé 1 :

a) On a $E(x) \leq x < E(x)+1$ donc $nE(x) \leq nx < nE(x)+n$

Aussi, $E(nx) \leq nx < E(nx)+1$ donc $E(nx) < nE(x)+n$.
On a aussi $nE(x) < E(nx)+1$ donc $nE(x) \leq E(nx)$

On en déduit donc que $0 \leq E(nx) - nE(x) < n \Rightarrow 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$

b) De la première inégalité, on en déduit que $0 \leq \frac{1}{n}E(nx) - E(x) \leq 1 - \frac{1}{n}$ d'où $E(x) \leq \frac{1}{n}E(nx) \leq E(x) + 1 - \frac{1}{n}$
En prenant la partie entière dans cette égalité, on en déduit le résultat.

Corrigé 2 :

Sachant que $kx - 1 \leq E(kx) \leq kx$, on obtient $\frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on en déduit que $\frac{x}{2}(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x}{2}(1+\frac{1}{n})$

Par passage à la limite et en appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{x}{2}$

Corrigé 3 :

1) Posons $n = E(x)$. On a donc $n \leq x < n+1$

Si n est pair, alors n=2p. On obtient donc $p \leq \frac{x}{2} < p + \frac{1}{2}$, $p + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < p+1$ donc on a :
$E(\frac{x}{2}) = p, E(\frac{x+1}{2}) = p$ et $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p = E(x)$

Si n est impair, alors n=2p+1. On obtient donc $p + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1, p+1 \leq \frac{x+1}{2} < p + \frac{3}{2}$ donc on a :
$E(\frac{x}{2}) = p, E(\frac{x+1}{2}) = p+1$ et $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p+1 = E(x)$

2) D'après 1), on a $E(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}) = E(\frac{n2^{-k}+1}{2}) = E(n2^{-k}) - E(n2^{-(k+1)})$. On en déduit que
$u_p = \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}) = \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n}{2^k}) - \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n}{2^{k+1}}) = \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n}{2^k}) - \sum_{k=1}^{p+1} E(\frac{n}{2^k})$. Par télescopage, on obient :
$u_p = E(n) - E(\frac{n}{2^{p+1}}) = n - E(\frac{n}{2^{p+1}})$.
A partir d'un certain rang p_0, on a $2^{p+1} > n$ donc $u_p = n$. Ainsi, la suite (u_p) est constante à partir de p_0 et on a $\lim_{p \to +\infty} u_p = n$

R.Flouret

Corrigé 4 :

Considérons la fonction $f: R \to R$ tel que $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E(\frac{t+k}{n})$

Soit $t \in [0;1]$. Pour $0 \le k \le n-1$, on a $E(\frac{t+k}{n}) = 0$ donc f(t)=0

Pour tout réel t, $f(t+1) = \sum_{k=0}^{n-1} E(\frac{t+1+k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} E(\frac{t+k}{n})$. Il vient : $f(t+1) = f(t) + E(\frac{t}{n}+1) - E(\frac{t}{n}) = f(t)+1$.

De ces 2 résultats, on en déduit que pour tout réel t, f(t)=E(t). Il reste à appliquer ce résultat à t=nx pour obtenir le résultat annoncé.

Corrigé 5 :

On a $E(x)=0$ si $0 \le x < 1$ et $E(x)=1$ si $1 \le x < 2$ donc $f(x)=x$ si $0 \le x < 1$ et $f(x)=x+1$ si $1 \le x < 2$.

On en déduit donc que f n'admet pas de limite en 1. Toutefois, f admet une limite à gauche égale à 1 et une limite à droite égale à 2.

Corrigé 6 :

f est bien définie car sur R, $x \ge E(x)$.

Si $x_0 \in R \backslash Z$, il existe un intervalle $I =]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ ne contenant aucun entier relatif. Sur I, la fonction partie entière est constante. Elle est donc continue en x_0 et on en déduit que de même f est continue en x_0 par composée de fonctions continues.

Si $x_0 = n \in Z$, on a $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$. De plus, $\lim_{x \to n^-} E(x) = n-1$ et $\lim_{x \to n^+} E(x) = n$, on a :

$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n$ et $\lim_{x \to n^+} f(x) = n + \sqrt{n-n} = n$

Donc f est continue en $x_0 \in R$.

Corrigé 7 :

En utilisant le fait que $x-1 < E(x) \le x$, on a pour tout $x \in R^*, \frac{b}{x} - 1 < E(\frac{b}{x}) \le \frac{b}{x}$ et en multipliant cette inégalité par $\frac{x}{a}$, on distingue 2 cas :

- si $x > 0, \frac{x}{a}(\frac{b}{x} - 1) < \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) \le \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} \Rightarrow (\frac{b}{a} - \frac{x}{a}) < \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) \le \frac{b}{a}$
- si $x < 0, \frac{x}{a}(\frac{b}{x} - 1) > \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) \ge \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} \Rightarrow (\frac{b}{a} - \frac{x}{a}) > \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) \ge \frac{b}{a}$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a} E(\frac{b}{x}) = \frac{b}{a}$.

Pour la seconde limite, on remarque que pour $x \in]0;a[, E(\frac{x}{a}) = 0$. On a donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x} E(\frac{x}{a}) = 0$.

De même, pour $x \in [-a;0[, E(\frac{x}{a}) = -1$.On a donc $\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} E(\frac{x}{a}) = +\infty$

Corrigé 8 :

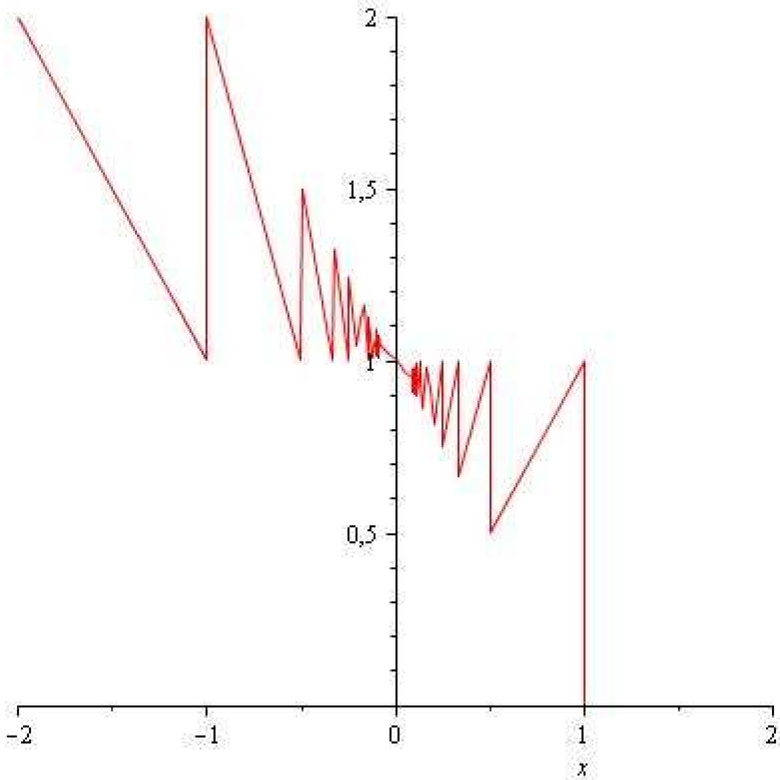
On a : $\forall n \in N^*, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow E(\frac{1}{x}) = n$

On a donc pour $\forall n \in N^*, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) = nx$. La fonction f est donc continue sur $R_+^* \backslash \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n\in N^*}$ et on a :

$\lim_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x) = f(\frac{1}{n}) = 1$ et $\lim_{x\to \frac{1}{n}^+} f(x) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Pour $x = \frac{1}{n}$ f est continue à gauche.

Du faut que $\forall n \in N^*, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) = nx$, on en déduit que $\forall n \in N^*, \frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1$.

Comme n tend vers l'infini lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieurs, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$et on peut prolonger f par continuité en posant f(0)=1. L'étude sur R_-^* est analogue. Voici la fonction f :



R.Flouret

Corrigé 9 :

Il suffit de montrer que $\forall(x,b)\in R\times N^*, E(\frac{x}{b})=E(\frac{E(x)}{b})$.

$E(x)\leq x<E(x)+1 \Rightarrow E(\frac{E(x)}{b})\leq\frac{E(x)}{b}\leq\frac{x}{b}<\frac{E(x)+1}{b}$

Il suffit de montrer que $\frac{E(x)+1}{b}\leq E(\frac{E(x)}{b})+1$ (1) pour conclure.

(1) $\Leftrightarrow E(x)+1\leq bE(\frac{E(x)}{b})+b$. Or $bE(\frac{E(x)}{b})+b>b(\frac{E(x)}{b}-1)+b=E(x)$.

Comme $bE(\frac{E(x)}{b})+b$ et $E(x)$ sont entiers, on a $bE(\frac{E(x)}{b})+b\geq E(x)+1$ puis le résultat annoncé.

R.Flouret