Exercice 1 :

Soit $P(X)$ un polynôme de $R[X]$ tel que $P(X^2+1)=(P(X))^2+1$ et $P(0)=1$.

1) Calculer $P(1), P(2), P(5), P(26)$

2) Considérer la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $\forall n\in N, u_{n+1}=u_n^2+1$ et déterminer P.

Exercice 2 :

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in C[X]$, avec $a_n \neq 0$. On pose $\delta_n=\max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|, 0\leq k\leq n-1\right\}$.

1) Montrer que $\left|\frac{a_0}{a_n x^n}+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n x}\right|\leq\frac{\delta}{|x|-1}$

2) En déduire que les racines de $P(X)$ sont dans le disque de centre 0 et de rayon $1+\delta$.

Exercice 3 :

Soit K un corps commutatif et $P(X)$ un polynôme à coefficients dans K, n'ayant que des racines simples.

Montrer que $\frac{1}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(x_i)(X-x_i)}$.

En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationelle $\frac{1}{X^n-1}$ dans $R[X]$, où $n\in N^*$.

Exercice 4 :

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire (donc non nul) à coefficients réels et scindé sur R, c'est-à-dire ayant toutes ses racines dans R. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Tous les coefficients de $P(X)$ sont positifs ou nuls

ii) Toutes les racines de $P(X)$ sont négatives ou nulles.

Exercice 5 : (CAPES 1990)

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ n points 2 à 2 distincts d'affixes respectives $a_1, a_2, ..., a_n$. On désigne par Γ l'ensemble des points M distincts des points $A_1, A_2, ..., A_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}=\overrightarrow{0}$.

Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à Γ si et seulement si $P'(z)=0$ où P' est le polynôme dérivé du polynôme P avec $P(X)=(X-a_1)(X-a_2)...(X-a_n)$

En déduire que Γ est fini, non vide de cardinal inférieur ou égal à $n-1$.

R.Flouret

Corrigé 1 :

1) Trivialement, $P(1)=2, P(2)=5, P(5)=26, P(26)=677$

2)) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété P_n : « $u_{n+1}=P(u_n)$ »

Montrons cette propriété par récurrence.

- Initialisation : P_0 est clairement vraie
- Hérédité : Soit $n \in N$. Si P_n est vraie, alors $u_{n+1}=P(u_n)$.

On a $P(u_{n+1})=P(u_n^2+1)=(P(u_n))^2+1=u_{n+1}^2+1=u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie.

L'axiome de récurrence nous permet de conclure que $\forall n \in N, u_{n+1}=P(u_n)$.

Ainsi, $P(u_n)=u_{n+1}=u_n^2+1$ donc $P(X)-(X^2+1)$ a pour racines les $u_n, n \in N^*$.

Comme $u_{n+1}-u_n=(u_n-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, on en déduit que (u_n) est strictement croissante.

Ainsi, $P(X)-(X^2+1)$ admet une infinité de racines. C'est le polynôme nul.

On en déduit que $P(X)=X^2+1$. La vérification est immédiate.

Corrigé 2 :

1) On a $\left|\frac{a_0}{a_n x^n}+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n x}\right| \leq \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\frac{1}{|x^n|}+\ldots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\frac{1}{|x|} \leq \delta\left(\sum_{i=1}^{n}(x^{-1})^i\right) \leq \frac{\delta}{|x|}\times\frac{1-\frac{1}{|x|^n}}{1-\frac{1}{|x|}} \leq \frac{\delta}{|x|-1}$

2) Soit α une racine de P. On a $\alpha^n a_n=-a_0-a_1\alpha-\ldots-a_{n-1}\alpha^{n-1}$.

Par l'absurde, on suppose que $|\alpha|>1+\delta$.

On a $1=\left|\frac{\alpha^n a_n}{\alpha^n a_n}\right|=\left|\frac{a_0+a_1\alpha+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1}}{\alpha^n a_n}\right|=\left|\frac{a_0}{a_n\alpha^n}+\frac{a_1}{a_n\alpha^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n\alpha}\right| \leq \frac{\delta}{|\alpha|-1}<1$. Absurde !

D'où $|\alpha|<1+\delta$

Corrigé 3 :

Quitte à diviser $P(X)$ par son coefficient dominant, ce qui multiplie par un même constante les deux membres de l'égalité à démontrer, on peut supposer $P(X)$ unitaire. Ainsi, $P(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$.

On en déduit que $P'(X)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(X-x_j)$. En particulier, $P'(x_i)=\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-x_j)$.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(X)}$ s'écrit : $\dfrac{1}{P(X)}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{X-x_i}$ où les a_i sont des constantes (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que les racines sont simples).
En multipliant successivement chaque membre de l'égalité précédente par $(X-x_i)$ pour chaque valeur de i, et en spécialisant la formule obtenue en $X=x_i$, on obtient que $a_i=\dfrac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-x_j)}=\dfrac{1}{P'(x_i)}$

Soit $P(X)=X^n-1$. Ses racines sont les racines n-ièmes de l'unité : $w_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k\in\{1;\ldots;n\}$.
On a donc $P(X)=\sum_{k=1}^{n}(X-w_k)$. Aussi, $P'(X)=nX^{n-1}$donc $P'(w_k)=nw_k^{n-1}=\dfrac{n}{w_k}$.

On a donc $\dfrac{1}{X^n-1}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{w_k}{(X-w_k)}$dans $C[X]$.
Pour factoriser dans $R[X]$, il faut distinguer 2 cas : n pair et n impair.

Dans les 2 cas, on peut regrouper 2 à 2 les racines n-ièmes conjugées.

Ainsi, $\dfrac{w_k}{X-w_k}+\dfrac{\overline{w}_k}{X-\overline{w}_k}=\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X-1\right)}{X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1}$ car $w_k+\overline{w}_k=2\operatorname{Re}(w_k)=2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ et $|w_k|^2=w_k\overline{w}_k=1$.

- Si n est pair, alors $\dfrac{1}{X^n-1}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X-1\right)}{X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1}\right)$

- Si n est impair, alors $\dfrac{1}{X^n-1}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{X-1}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X-1\right)}{X^2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X+1}\right)$

Corrigé 4 :

Ecrivons $P(X)=X^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_iX^i, a_i\in R$. Les coefficients de $P(X)$ s'expriment en fonction de ses racines $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (comptées avec multiplicité) grâce aux formules : $a_{n-k}=(-1)^k\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}$ (1)

$i)\Rightarrow ii)$: On suppose que $a_i\ge 0$ pour tout i et que toutes les racines de $P(X)$ sont strictement positives. Soit x_k l'une d'entre elles. Alors $P(x_k)=x_k^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix_k^i\ge x_k^n>0$. Absurde car x_k est une racine de P d'où le résultat.

$ii) \Rightarrow i)$ Si toutes les racines de $P(X)$ sont négatives ou nulles, alors clairement, à partir de (1), on en déduit que les coefficients de $P(X)$ sont positifs ou nuls.

Corrigé 5 :

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - z}{|a_i - z|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\overline{a_i} - \overline{z})}$ en utilisant le fait que $|z|^2 = z\overline{z}$.

Ainsi, $M \in \Gamma \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\overline{a_i} - \overline{z})} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i - z)} = 0$.

Soit $P(X) = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$. On a donc le résultat classique : $P'(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P(X)}{(X - a_i)}$ d'où

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)} .$$

Ainsi, $M \in \Gamma \Leftrightarrow P'(z) = 0$.

Γ n'est pas vide d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. De plus, comme P' est de degré n-1,on en déduit que $card(\Gamma) \leq n - 1$.