1) De manière évidente, $X_n(\Omega) = \{0;1;2;...;n\}$

2) On a $E[X_n] = \sum_{k=1}^{n} E[\chi_{A_k}] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

En effet, $\forall 1 \le k \le n,\ P(A_k) = \frac{Card(A_k)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

De plus, $\forall 1 \le k, l \le n,$ avec $k \ne l$, on a : $P(A_k \bigcap A_l) = \frac{Card(A_k \bigcap A_l)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.

Par suite,

$$E[X_n^2] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \chi_{A_k}\chi_{A_l}\right] = \sum_{k=1}^{n} E[\chi_{A_k}] + \sum_{1 \le k \ne l \le n} E(\chi_{A_k \cap A_l}) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{1 \le k \ne l \le n} P(A_k \bigcap A_l)$$

Ainsi, $E[X_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{1 \le k \ne l \le n} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + 1 = 2$.

On en déduit que $Var(X_n) = E[X_n^2] - E^2[X_n] = 2 - 1 = 1$

3) $\forall 1 \le k \le n$ et $\forall 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$, on a :

$$P(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap ... \bigcap A_{i_k}) = \frac{Card(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap ... \bigcap A_{i_k})}{Card(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)...(n-k+1)}$$

4) En se servant de la question 3) et de la formule de Poincaré simplifiée, on en déduit que la probabilité qu'il y ait au moins une rencontre est :

$$P(X_n \ge 1) = P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Ainsi, $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n \ge 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5) Comme $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$, on en déduit que l'égalité est vraie pour $k = 0$ et $k = n$.

$\forall 1 \le k \le n-1,$ il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir exactement k boules portant leur numéro. Pour les $(n-k)$ autres boules, il y a exactement $(n-k)!P(X_{n-k} = 0)$ possibilités qu'il n'y ait aucune rencontre.

Par conséquent, on déduit de 4) que :

$$P(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k}(n-k)!P(X_{n-k} = 0)}{n!} = \frac{1}{k!} P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}$$

6) $\forall 0 \le k \le n,$ on a $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} = \frac{1}{k!} e^{-1}$ donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \sim \mathcal{P}(1)$.