Brevet 1994 : Bordeaux

I) Activités numériques

Exercice 1 :

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (où a et b sont des entiers) le nombre : $E = \sqrt{75} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{3}$.

Calculer : $F = 3(3 - 2\sqrt{3})^2$; $G = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations :

$x - 2(3x - 8) = 0$;

$(x - 2)(3x - 8) = 0$;

$(x - 2)(3x - 8) = 16$ (on pourra développer le premier membre).

Exercice 3 :

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour ; elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 250 F pièce, les autres 400 F pièce. On désigne par x le nombre de chaises à 250 F fabriquées chaque jour.

a) Exprimer en fonction de x le nombre de chaises à 400 F.

b) L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 48 450 F par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 250 F que de chaises à 400 F.

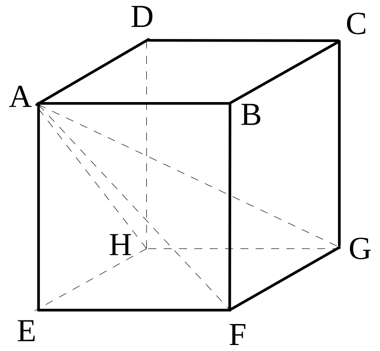
Combien doit-elle fabriquer de chaises à 250 F par jour ?

II) Activités géométriques :

Exercice 1 :

Dans un cube ABCDEFGH, on considère la pyramide de sommet A, de base EFGH, de hauteur AE.

On donne : AB = 6 cm.



a) Dessiner en vraie grandeur les faces AEH et AHG (le triangle AHG est rectangle en H).

b) Calculer la longueur exacte des arêtes [AH] et [AG].

c) Déterminer, à 0,1° près, la mesure des angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{AGE}$. (On admettra que le triangle AGE est rectangle en E.)

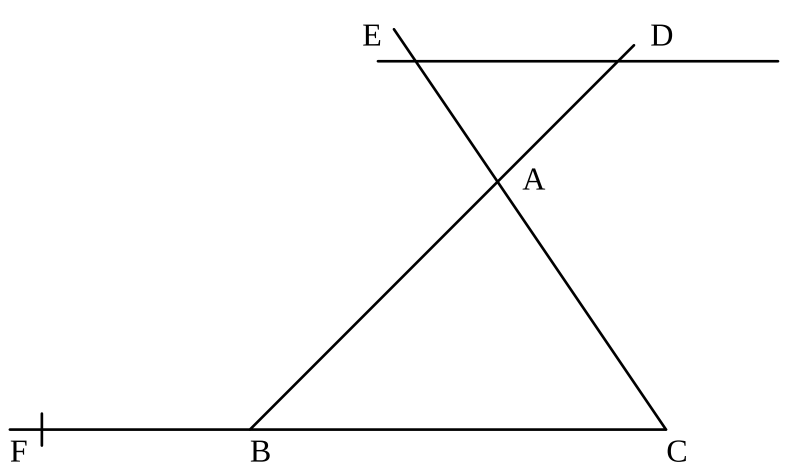
Exercice 2 :

On donne : AB = 7,5cm ; BC = 9cm ; AC = 6cm ; AE = 4 cm ; BF = 6cm et (ED) // (BC).

a) Calculer AD.

b) Les droites (EF) et (AB) sont-elles parallèles ? Pourquoi ? Calculer EF.

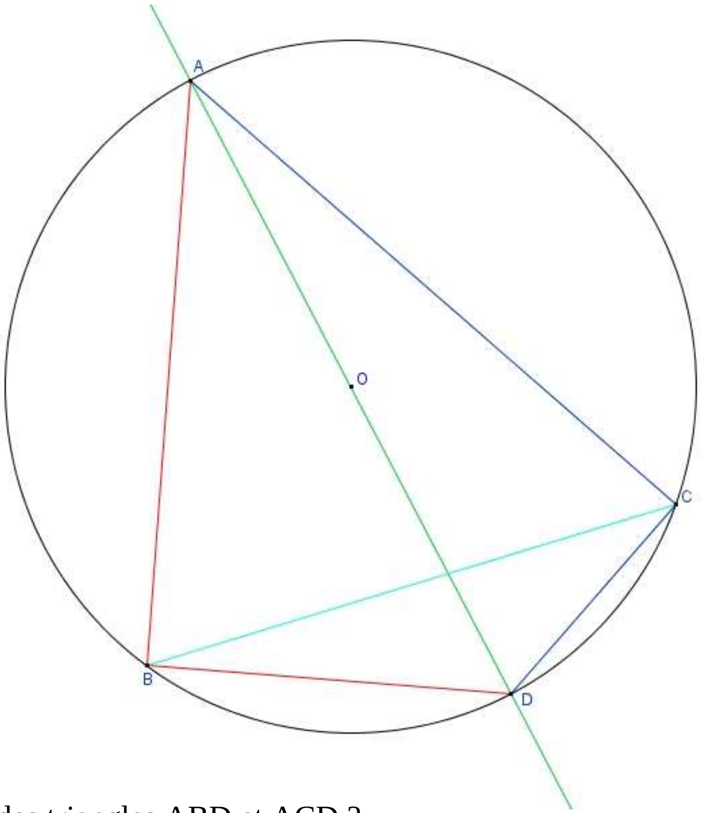
La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.



R.Flouret

Problème :

A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et [AD] un diamètre de ce cercle. On complètera la figure fournie au fur et à mesure de la résolution du problème.



1) Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?

2) La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.

a) Que représente H pour le triangle ABC ?
b) En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC).
c) Montrer que (BH) est parallèle à (CD).

4) Démontrer que BHCD est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales.

Que représente K pour le segment [HD] ?

5) a) Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.

b) Montrer que I est le milieu de [HJ] (on pourra utiliser le triangle HDJ, après avoir précisé la position de K sur le segment [HD])

I) Activités numériques

Corrigé 1 :

$E = \sqrt{75} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{3}$
$E = \sqrt{25\times 3} + 3\sqrt{4\times 3} - 4\sqrt{3}$
$E = \sqrt{25}\times\sqrt{3} + 3\sqrt{4}\times\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
$E = 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
$E = 7\sqrt{3}$

$F = 3(3 - 2\sqrt{3})^2$
$F = 3\left(3^2 - 2\times 3\times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2\right)$
$F = 3(9 - 12\sqrt{3} + 12)$
$F = 3(21 - 12\sqrt{3})$
$F = 63 - 36\sqrt{3}$

$G = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$
$G = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$
$G = 5 - 2$
$G = 3$

Corrigé 2 :

$x - 2(3x - 8) = x - 6x + 16 = -5x + 16$

Résoudre $x - 2(3x - 8) = 0$ revient donc à résoudre $-5x + 16 = 0$ c'est-à-dire $5x = 16$ soit $x = \frac{16}{5}$

La solution de cette équation est donc $\frac{16}{5}$.

$(x - 2)(3x - 8) = 0$

Or, si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul

Donc soit $x - 2 = 0$ soit $3x - 8 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $3x = 8$

$x = \frac{8}{3}$

Les solutions de cette équation sont donc 2 et $\frac{8}{3}$.

$(x - 2)(3x - 8) = 3x^2 - 8x - 6x + 16 = 3x^2 - 14x + 16$

Résoudre $(x - 2)(3x - 8) = 16$ revient à résoudre $(x - 2)(3x - 8) - 16 = 0$.

$(x - 2)(3x - 8) - 16 = 0$
$3x^2 - 14x + 16 - 16 = 0$
$3x^2 - 14x = 0$
$x(3x - 14) = 0$

Or, si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul.

Donc soit $x = 0$ soit $3x - 14 = 0$

$3x = 14$

$x = \frac{14}{3}$

Les solutions de cette équation sont donc 0 et $\frac{14}{3}$.

R.Flouret

Corrigé 3 :

a) Clairement le nombre de chaises à 400 F est de $150 - x$

b) $250x$ est le montant que rapporte la vente des chaises vendues 250 F pièce.
$400 \times (150 - x)$ est le montant que rapporte la vente des chaises vendues 400 F pièce.

L'entreprise impose 2 conditions :
- $250x + 400 \times (150 - x) > 48450$
- $x > 150 - x$

Nous somme donc ramener à résoudre le système : $\begin{cases} 250x + 400 \times (150 - x) > 48450 \\ x > 150 - x \end{cases}$

Comme $400 \times (150 - x) = 60000 - 400x$, la première condition nous donne :
$400x - 250x < 60000 - 48450$
$150x < 11550$
$x < \dfrac{11550}{150}$
$x < 77$

La deuxième condition nous donne $2x > 150$ soit $x > \dfrac{150}{2}$ c'est-à-dire $x > 75$.
Ainsi, nous cherchons x tel que $75 < x < 77$. Clairement, $x = 76$

Pour répondre au besoin de l'entreprise, il faut donc fabriquer 76 chaises à 150 F par jour.

I) Activités géométriques

Corrigé 1 :

a) Aucun problème

b) ABCDEFGH donc $AB = AE = EH = HG = 6cm$

Le triangle AEH est rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AH^2 = AE^2 + EH^2$

$AH^2 = 6^2 + 6^2$

$AH^2 = 36 + 36$

$AH^2 = 72$

$AH = \sqrt{72}cm$

Le triangle AHG est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AG^2 = AH^2 + HG^2$

$AG^2 = 72 + 6^2$

$AG^2 = 72 + 36$

$AG^2 = 108$

$AG = \sqrt{108}cm$

c) Les carrés AEHD, ABFE et EFGH sont superposables donc $AH = AF = EG = \sqrt{72}cm$
Le triangle AFE est rectangle en E.

On a $\cos(\widehat{AFE}) = \dfrac{EF}{AF}$

Donc $\cos(\widehat{AFE}) = \dfrac{6}{\sqrt{72}}$

Ainsi, $\widehat{AFE} = 45°$.

Le triangle AGE est rectangle en E.

On a $\cos(\widehat{AGE}) = \dfrac{EG}{AG}$

Donc $\cos(\widehat{AGE}) = \dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{108}}$

Ainsi, $\widehat{AGE} \approx 35{,}3°$

Corrigé 2 :

a) Les droites (BD) et (EC) sont sécantes en A et (ED)//(BC)
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

Calcul de AD :

$\frac{AD}{7{,}5} = \frac{4}{6}$ donc $6 \times AD = 7{,}5 \times 4$

$$AD = \frac{7{,}5 \times 4}{6}$$

$$AD = 5cm$$

b) $A \in [EC]$ donc $CE = CA + AE = 6 + 4 = 10cm$

$B \in [FC]$ donc $CF = CB + BF = 9 + 6 = 15cm$

On a $\frac{CA}{CE} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $\frac{CB}{CF} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Sur les droites (EA) et (FB) sécantes en C, les points C, A, E d'une part et C, B, F d'autre part sont alignés dans le même ordre et $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CF}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (EF)//(AB)

Les droites (EA) et (FB) sont sécantes en C et (EF)//(AB)
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CF} = \frac{AB}{EF}$$

Calcul de EF :

$\frac{7{,}5}{EF} = \frac{6}{10}$ donc $6 \times EF = 7{,}5 \times 10$

$$EF = \frac{7{,}5 \times 10}{6}$$

$$EF = 12{,}5cm$$

Problème :

1) B appartient au cercle de diamètre [AD]
D’après la réciproque de la propriété de l’angle droit, j’en conclus que ABD est un triangle rectangle en B.

De même, ACD est un triangle rectangle en C.

2) La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en E donc (AB)$\perp$(CE).
D’après la définition d’une hauteur, on en déduit que (CE) est la hauteur relative au côté [AB] dans le triangle ABC.

3) a) La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe la droite (CE) en H donc (BC) $\perp$(AH) et $H \in [CE]$
D’après la définition d’une hauteur, on en déduit que (AH) est la hauteur relative au côté [BC] dans le triangle ABC.

Aussi, H appartient à deux des hauteurs du triangle ABC. H est donc le point de concours des hauteurs du triangle ABC, c’est-à-dire l’orthocentre du triangle ABC.

b) H est le point de concours des hauteurs donc H appartient à la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
D’après la définition d’une hauteur, j’en déduis que (BH) $\perp$(AC)

c) ACD est un triangle rectangle en C donc (CD) $\perp$(AC)

On a (BH) $\perp$(AC) et (CD) $\perp$(AC)
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (BH)//(CD)

4) ABD est un triangle rectangle en B donc (AB) $\perp$(BD).
Aussi, (AB)$\perp$(CE) et $H \in [CE]$ donc (AB) $\perp$(CH)

On a donc (AB) $\perp$(BD) et (AB) $\perp$(CH)
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (BD)//(CH)

Dans le quadrilatère BHCD, on a (BH)//(CD) et (BD)//(CH)
Or, si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c’est un parallélogramme .
Donc BHCD est un parallélogramme.

BHCD est un parallélogramme.
Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
Donc K est le milieu de [HD]

R.Flouret

5) a) J appartient au cercle de diamètre [AD].

D'après la réciproque de la propriété de l'angle droit, j'en conclus que ADJ est un triangle rectangle en J.

ADJ est un triangle rectangle en J donc et (AJ) $\perp$(DJ).

De plus, $I \in [AJ]$ donc (AI) $\perp$(DJ).

Aussi, la perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (BC) en I donc et (AI) $\perp$(CI)

On a donc (AI) $\perp$(DJ) et (AI) $\perp$(CI)
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc (DJ)//(CI)

b) On a (DJ)//(CI) et $K \in [CI]$ donc (DJ)//(KI)

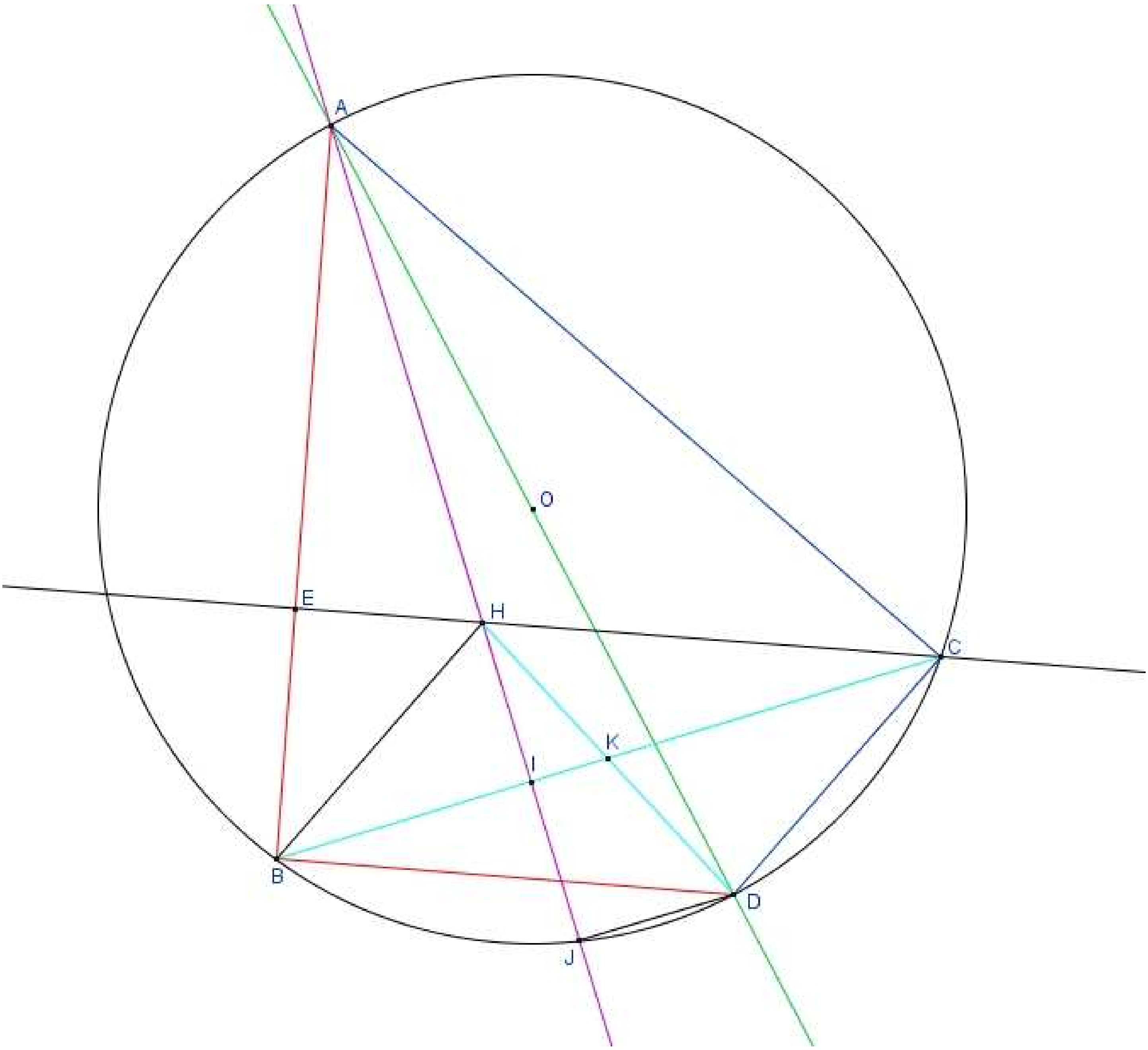
Dans le triangle HJD, K est le milieu de [HD] et (DJ)//(KI)

Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc (KI) coupe [HJ] en son milieu.

De plus, $I \in [HJ]$.

Donc I est le milieu de [HJ]



R.Flouret