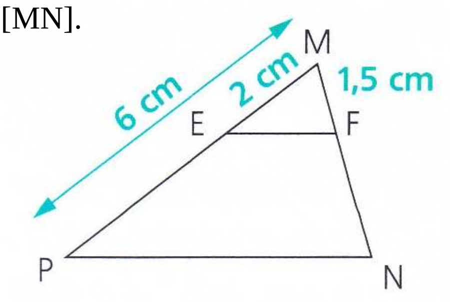
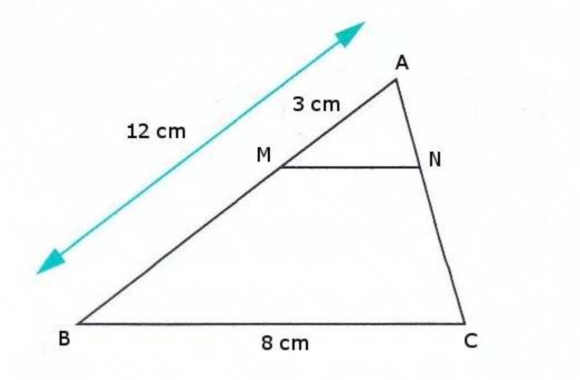
Exercice 1 :

Dans chaque cas, calculer la longueur MN.

a) E est un point de [MP] et F un point de [MN].
(EF) et (PN) sont parallèles.



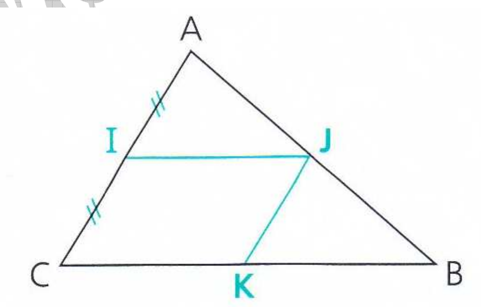
b) M est un point de [AB] et N un point de [AC]
(MN) et (BC) sont parallèles.



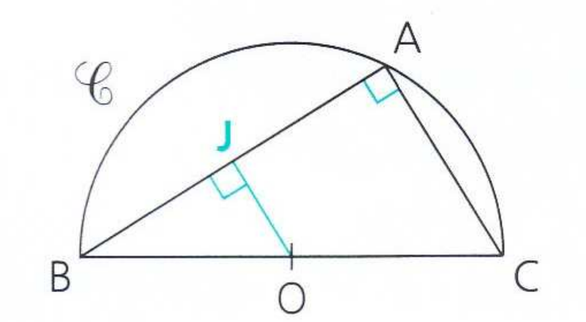
Exercice 2 :

Dans chaque cas, montrer que le point J est le milieu de [AB]

a) IJKC est un parallélogramme. I est le milieu de [AC]
(AJ) et (CK) se coupent en B.



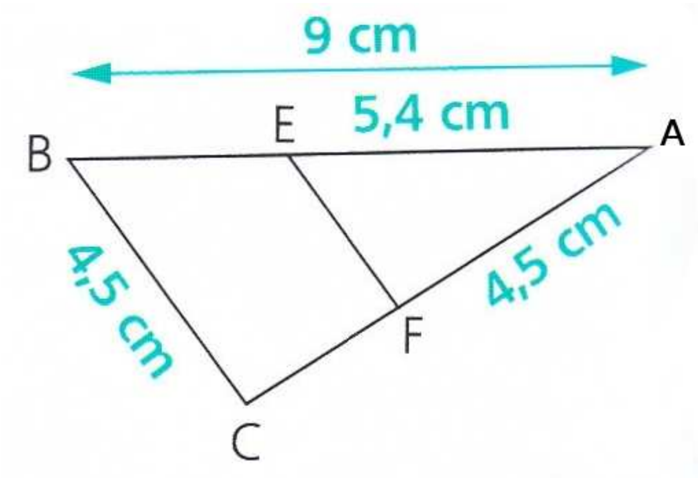
b) A est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] et de centre O. J est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par O.



R.Flouret

Exercice 3 :

E est un point de [AB] et F un point de [AC]. Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.
Calculer EF puis AC.



Exercice 4 :

Soit STU un triangle et I le milieu de [TU].

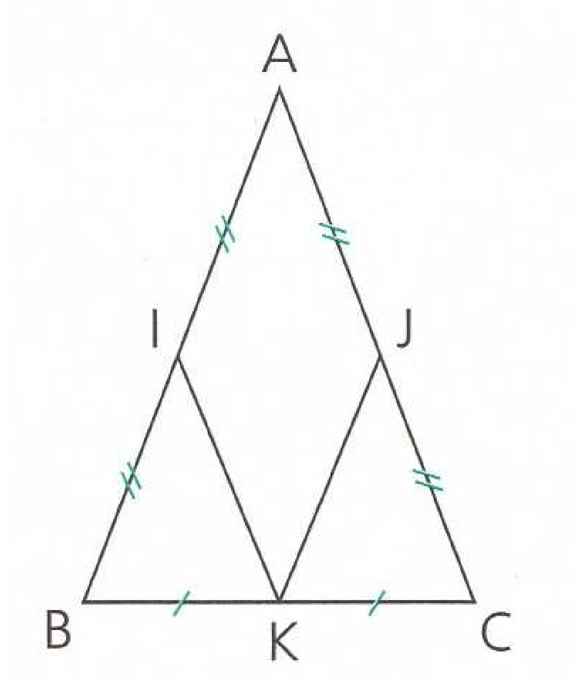
a) La parallèle à (SI) passant par T coupe (SU) en R et la parallèle à (SI) passant par U coupe (ST) en V. Démontrer que S est le milieu de [RU] et de [TV]

b) En déduire la nature du quadrilatère RVUT.

Exercice 5 :

ABC est un triangle isocèle en A et $AB = 8cm$.
I, J et K sont les milieux de ses côtés.

a) Calculer les longueurs IK et KJ.
b) Quelle est la nature du quadrilatère AIKJ ?



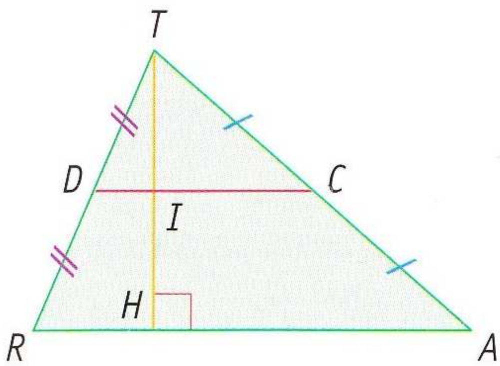
Exercice 6 :

EFGH est un parallélogramme. K est le symétrique de E par rapport à H.
La droite (KG) coupe la droite (EF) en L. Démontrer que G est le milieu de [KL]

Exercice 7 :

Dans le triangle TAR :

- Les points D et C sont les milieux respectifs des côtés [TR] et [AT]
- La droite (TH) est la hauteur relative au côté [AR]



Démontrer que l'aire du triangle TAR est égale à quatre fois l'aire du triangle TDC.

Piste : On pourra suivre le raisonnement suivant :

1) Montrer que (CD)//(RA)

2) Montrer que (TI) est une hauteur du triangle TDC puis en déduire que $A_{TDC} = \dfrac{DC \times IT}{2}$

3) Montrer que $DC = \dfrac{RA}{2}$

4) Montrer que I est le milieu du segment [TH]

5) Conclure.

Corrigé 1 :

a) Dans le triangle MNP, on a :

- $E \in [MP]$
- $F \in [MN]$
- (EF)//(PN)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MF}{MN} = \frac{EF}{PN}$$

Calcul de MN :

On a $\frac{2}{6} = \frac{1.5}{MN}$ donc $2 \times MN = 6 \times 1.5$

$$MN = \frac{6 \times 1.5}{2}$$

$$MN = \frac{9}{2}$$

$$MN = 4.5cm$$

b) Dans le triangle ABC, on a :

- $M \in [AB]$
- $N \in [AC]$
- (MN)//(BC)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Calcul de MN :

On a $\frac{3}{12} = \frac{MN}{8}$ donc $12 \times MN = 3 \times 8$

$$MN = \frac{3 \times 8}{12}$$

$$MN = \frac{24}{12}$$

$$MN = 2cm$$

Corrigé 2 :

a) IJKC est un parallélogramme
Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles.
Donc (IJ)//(CK)
De plus, $B \in (CK)$
Donc (IJ)//(BC)

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et (IJ)//(BC)
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc (IJ) coupe [AB] en son milieu
De plus, $J \in [AB]$
donc J est le milieu de [AB].

b) D'après la figure, on a (JO)$\perp$(AB) et (AC) $\perp$(AB)
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
Donc (JO)//(AC).

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de diamètre [BC] donc O est le milieu de [BC]

Dans le triangle ABC, J est le milieu de [AB] et (JO)//(AC)
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc (JO) coupe [BC] en son milieu
De plus, $J \in [AB]$.
Donc J est le milieu de [AB].

Corrigé 3 :

Dans le triangle ABC, on a :
- $E \in [AB]$
- $F \in [AC]$
- (EF)//(BC)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Calcul de EF :

On a $\frac{5.4}{9}=\frac{EF}{4.5}$ donc $9\times EF=5.4\times 4.5$

$$EF=\frac{5.4\times 4.5}{9}$$
$$EF=\frac{24.3}{9}$$
$$EF=2.7cm$$

Calcul de AC :

$\frac{5.4}{9}=\frac{4.5}{AC}$ donc $5.4\times AC=9\times 4.5$

$$AC=\frac{9\times 4.5}{5.4}$$
$$AC=\frac{40.5}{5.4}$$
$$AC=7.5cm$$

Corrigé 4 :

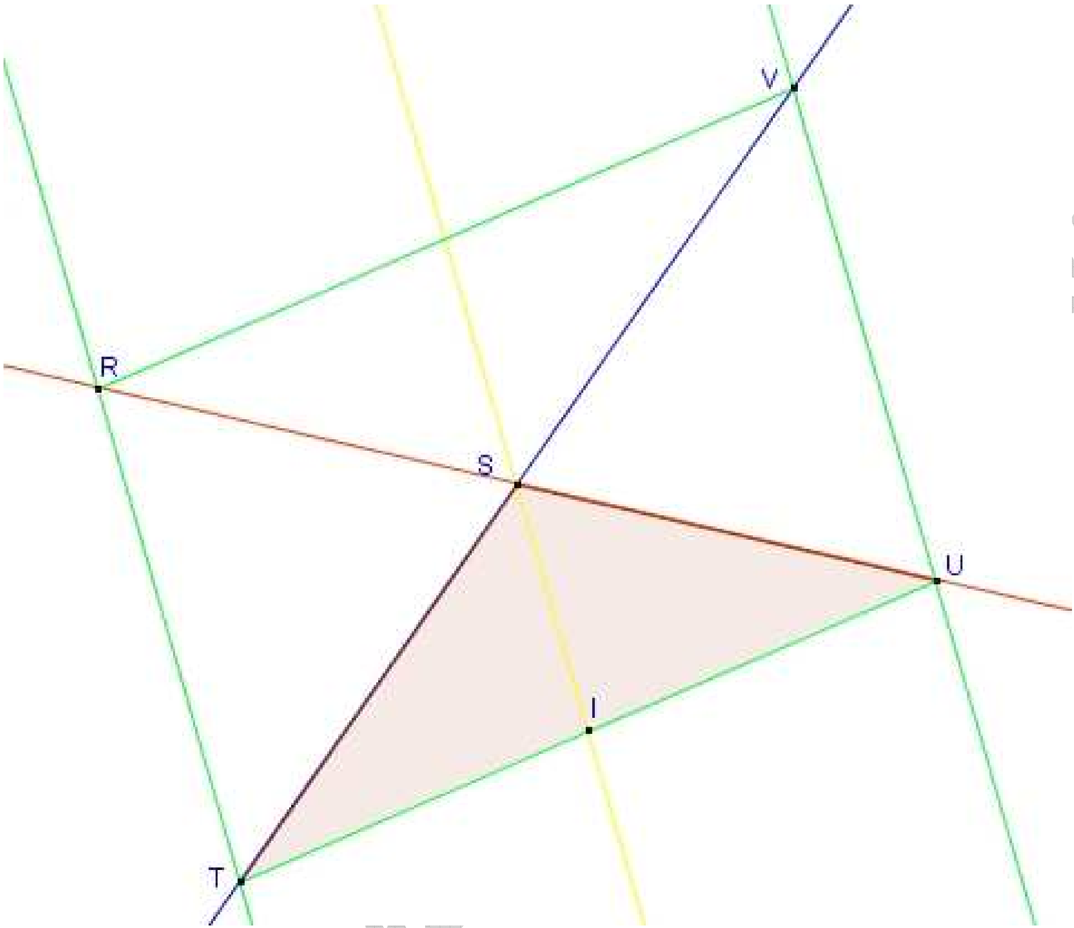
a) La parallèle à (SI) passant par T coupe (SU) en R donc (RT)//(SI)

Dans le triangle RTU, I est le milieu de [TU] et (RT)//(SI)
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu
Donc (SI) coupe [RU] en son milieu.
De plus, $S\in[RU]$
Donc S est le milieu de [RU].

La parallèle à (SI) passant par U coupe (ST) en V donc (UV)//(SI)

Dans le triangle UVT, (UV)//(SI) et I est le milieu de [TU]
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu
Donc (SI) coupe [TV] en son milieu.
De plus, $S\in[TV]$
Donc S est le milieu de [TV].

b) Dans le quadrilatère RVUT, S est le milieu des diagonales [RU] et [VT]
Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme
Donc RVUT est un parallélogramme.



Corrigé 5 :

a) Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et K est le milieu de [BC]
Or, dans un triangle, si un segment a pour extrémité les milieux de deux côtés, alors il a pour longueur la moitié de celle du troisième.

Donc $IK = \frac{AC}{2}$

Or, ABC est un triangle isocèle en A donc $AB = AC = 8cm$

Ainsi, $IK = \frac{8}{2}$

$IK = 4cm$

Dans le triangle ABC, J est le milieu de [AC] et K est le milieu de [BC]
Or, dans un triangle, si un segment a pour extrémité les milieux de deux côtés, alors il a pour longueur la moitié de celle du troisième.

Donc $JK = \frac{AB}{2}$

Or $AB = 8cm$

Donc $JK = \frac{8}{2}$

$JK = 4cm$

b) I est le milieu de [AB] donc $AI = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$

J est le milieu de [AC] donc $AJ = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$

Dans le quadrilatère AIKJ, on a $AI = IK = KJ = JA$
Or, si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange
Donc AIKJ est un losange.

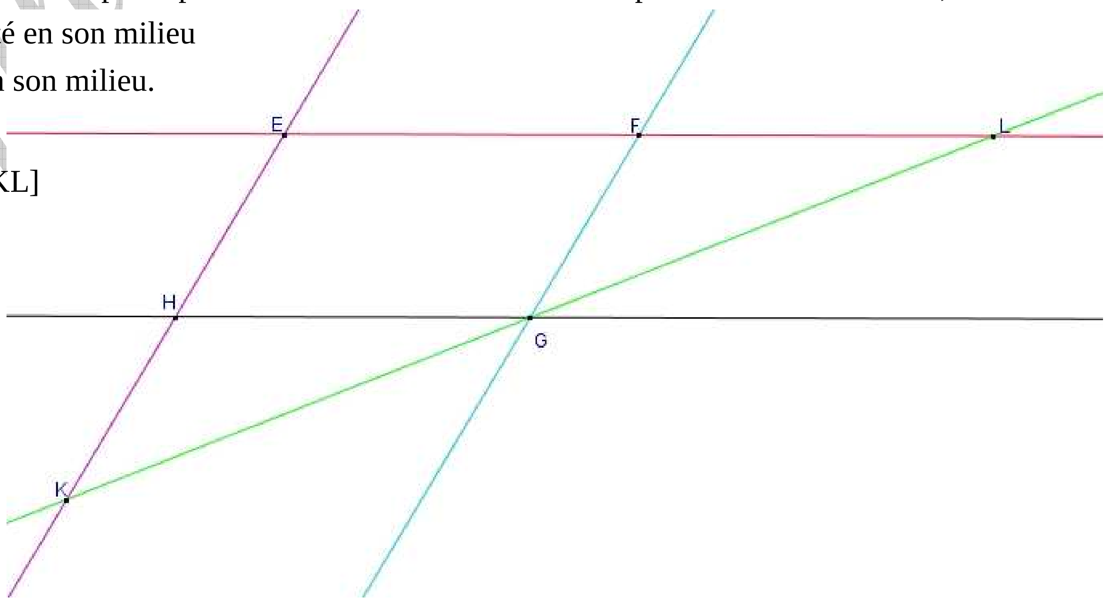
Corrigé 6 :

EFGH est un parallélogramme
Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles
Donc (EF)//(HG)

On a (EF)//(HG) et $L \in (EF)$ donc (EL)//(HG)

K est le symétrique de E par rapport à H donc H est le milieu de [KE].

Dans le triangle EKL, H est le milieu de [KE] et (EL)//(HG).
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu
Donc (HG) coupe [KL] en son milieu.
De plus, $G \in [KL]$
Donc G est le milieu de [KL]



Corrigé 7 :

1) Dans le triangle TRA, D est le milieu de [TR] et C le milieu de [AT].
Or, dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc (DC)//(AR)

2) D'après la figure, on a (TH)$\perp$(AR)

On a (DC)//(AR) et (TH)$\perp$(AR)
Or, si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre
Donc (TH)$\perp$(DC)

On a (TH)$\perp$(DC) et $I \in [TH]$ donc (TI)$\perp$(DC).

Dans le triangle TDC, (TI)$\perp$(DC).
D'après la définition d'une hauteur, on en déduit que (TI) est la hauteur relative au côté [DC] dans le triangle TDC.

Ainsi, $A_{TDC} = \dfrac{DC \times IT}{2}$

3) Dans le triangle TAR, D est le milieu de [TR] et C le milieu de [AT].
Or, dans un triangle, si un segment a pour extrémité les milieux de deux côtés, alors il a pour longueur la moitié de celle du troisième.
Donc $DC = \dfrac{AR}{2}$

4) On a (DC)//(RA), $I \in [DC]$ et $H \in [RA]$ donc (DI)//(RH)

Dans le triangle TRH, D est le milieu de [TR] et (DI)//(RH)
Or, dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu
Donc (DI) coupe [TH] en son milieu.
De plus, $I \in [TH]$
Donc I est le milieu de [TH]

5) I est le milieu de [TH] donc $IT = \frac{TH}{2}$. Ainsi, $TH = 2IT$. On a aussi $DC = \frac{AR}{2}$ donc $AR = 2DC$

Or $A_{TRA} = \frac{AR \times TH}{2}$

$$A_{TRA} = \frac{2DC \times 2IT}{2}$$

$$A_{TRA} = \frac{4 \times DC \times IT}{2}$$

$$A_{TRA} = 4 \times \frac{DC \times IT}{2}$$

$$A_{TRA} = 4A_{TDC}$$

Ainsi, l'aire du triangle TAR est égale à quatre fois l'aire du triangle TDC.