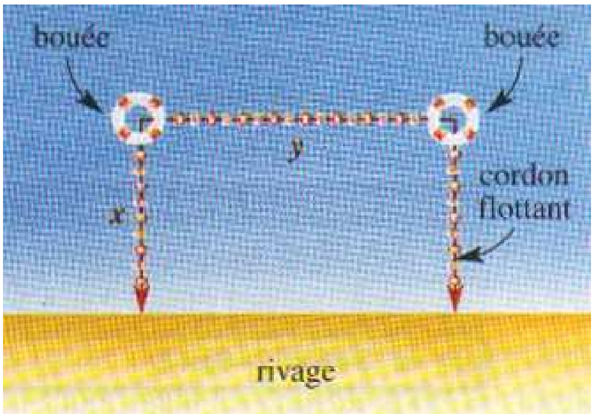
Exercice 1 :

Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur R par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 2 :



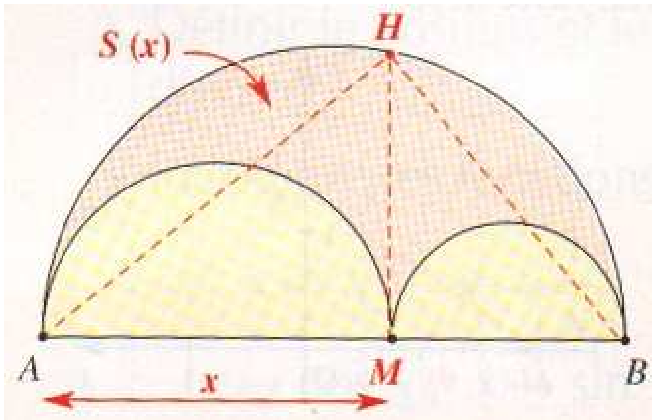
Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.

1) Avec les notations de la figure, vérifier que l'aire de la baignade est : $S(x)=x(360-2x)$(x en m et S(x) en m²)

2) Vérifier l'égalité : $S(x)=16200-2(x-90)^2$.
En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire de baignade est maximale.

Exercice 3 :

On note S(x) l'aire (colorée en rouge), limitée par les trois demi-cercles de diamètres respectifs [AB], [AM] et [MB].
On suppose que $AB=10$ et $AM=x$ $(0\leq x\leq 10)$.



A) Vérifier l'égalité : $S(x)=\dfrac{\pi}{4}x(10-x)$.

Trouver le maximum de S(x) revient alors à trouver celui de $f(x)=x(10-x)$.

B) Maximum de f(x)

1) *Méthode algébrique* : Vérifier que $f(x)=25-(x-5)^2$ et résoudre le problème posé.

2) *Méthode géométrique* : La perpendiculaire à (AB) en M coupe le demi-cercle de diamètre [AB] en H.

a) Montrer que $\widehat{MAH}=\widehat{MHB}$

b) En utilisant la tangente de ces angles, établir que $MH^2=f(x)$.

c) Résoudre alors le problème posé.

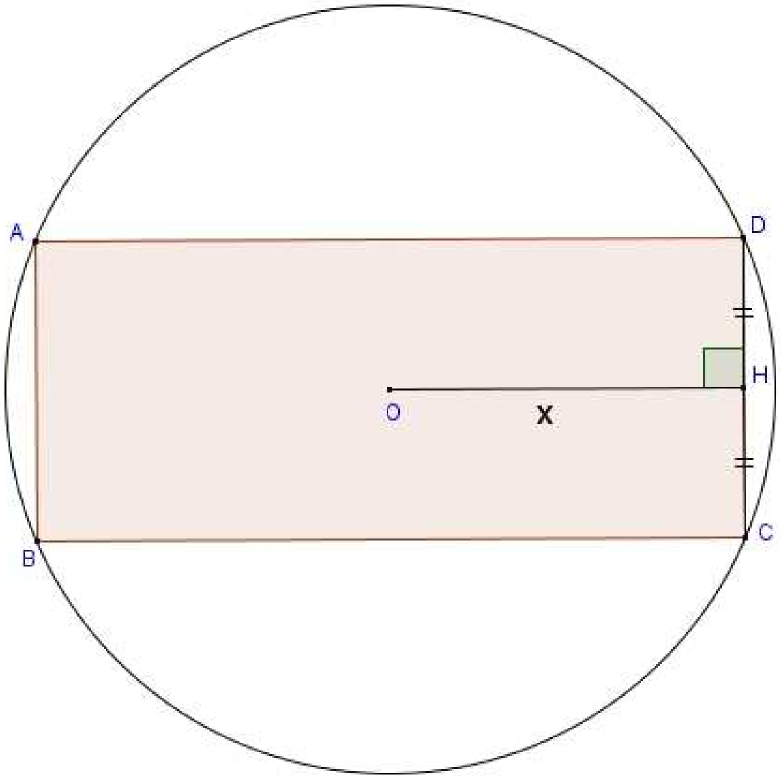
R.Flouret

Exercice 4 :

Le but du problème est de rechercher si, parmi les rectangles inscrits dans un cercle, il en est qui sont d'aire maximale. On désigne par C le cercle, O son centre et R son rayon.

A) *Approche 1*

On choisit comme variable x la moitié de l'un des côtés du rectangle.



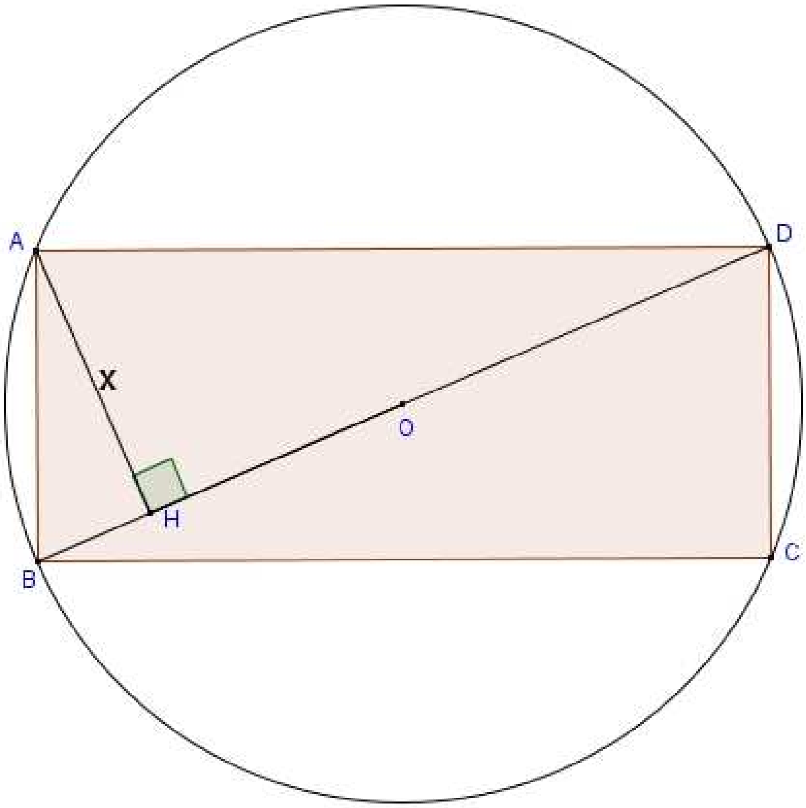
1) Etablir que les dimensions du rectangle sont : $2x$ et $2\sqrt{R^2 - x^2}$

2) En déduire que le problème posé revient à chercher le maximum de la fonction f définie sur $[0; R]$ par :
$f(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Remarque : Devant l'aspect peu engageant de la formule explicite, envisageons une autre approche.

B) *Approche 2*

On choisit comme variable x la distance d'un sommet à la diagonale ne le contenant pas.



Exprimer l'aire du rectangle et montrer qu'elle est maximale lorsque $x = R$.
Evaluer cette aire et préciser la forme du rectangle obtenu.

Corrigé 1 :

On a $f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=f(x)$. f est donc paire. Nous pouvons nous limiter à l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soient x et x' deux réels positifs quelconques tels que $x<x'$. On a donc $x^2<x'^2$.

On en déduit que $1+x^2<1+x'^2$ puis $\dfrac{1}{1+x'^2}<\dfrac{1}{1+x^2}$ c'est-à-dire $f(x')<f(x)$. f est donc décroissante sur $[0;+\infty[$.

Du fait que f soit paire, nous pouvons en déduire le tableau de variation :

x	$-\infty$	O	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	1	$\searrow$

Remarque : vous verrez plus tard (ou pas…) que cette fonction est la fonction arctan.

Corrigé 2 :

1) La longueur du cordon en mètre est $2x+y$. Comme $2x+y=360$, on en déduit que $y=360-2x$.
L'aire du rectangle est : $x\times y=x\times(360-2x)$.

2) On a $(x-90)^2=x^2-180x+8100$

$$16200-2(x-90)^2=16200-2x^2+360x-16200=360x-2x^2=x\times(360-2x)=S(x)$$

Clairement, $S(x)$ sera maximale lorsque $2(x-90)^2=0$ c'est-à-dire $x=90$ et cette aire maximale est de 16200m². Le rectangle correspondant a pour dimensions 90m et 180m

Corrigé 3 :

A) L'aire du demi-cercle de diamètre [AM] est $\dfrac{\pi x^2}{8}$.

On a $MB=AB-AM=10-x$ donc l'aire du demi-cercle de diamètre [MB] est $\dfrac{\pi(10-x)^2}{8}$.

L'aire du demi-cercle de diamètre [AB] est $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{10}{2}\right)^2=\dfrac{25\pi}{2}$

On en déduit que :

$$S(x)=\frac{25\pi}{2}-\frac{\pi x^2}{8}-\frac{\pi(10-x)^2}{8}=\frac{100\pi-\pi x^2-100\pi+20\pi x-\pi x^2}{8}=\frac{20\pi x-2\pi x^2}{8}=\frac{\pi}{4}x(10-x)$$

R.Flouret

B) 1) $25-(x-5)^2 = 25-x^2+10x-25 = x(10-x) = f(x)$

Ainsi, f(x) sera maximale lorsque $(x-5)^2 = 0$ c'est-à-dire $x=5$.

2) a) H appartient au demi-cercle de diamètre [AB] donc le triangle AHB est rectangle en H.

AHB est un triangle rectangle en H. On a donc $\widehat{\mathrm{AHM}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{MHB}}$

En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π, on en déduit que

$\widehat{\mathrm{MAH}} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \widehat{\mathrm{MHB}}$

Ainsi, $\widehat{\mathrm{MAH}} = \widehat{\mathrm{MHB}}$

b) On a $\tan(\widehat{\mathrm{MAH}}) = \frac{MH}{AM} = \frac{MH}{x}$ et $\tan(\widehat{\mathrm{MHB}}) = \frac{MB}{MH} = \frac{10-x}{MH}$.

Comme $\begin{cases} \widehat{MAH} = \widehat{MHB} \\ 0 < \widehat{MAH} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \widehat{MHB} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, on en déduit que $\tan(\widehat{\mathrm{MAH}}) = \tan(\widehat{\mathrm{MHB}})$

Ainsi, $\frac{MH}{x} = \frac{10-x}{MH}$ donc $MH^2 = x(10-x) = f(x)$

c) La question B) 1) nous permet de conclure. Ainsi, M doit être le milieu de [AB].

Corrigé 4 :

1) Avec les notations de la figure, on a clairement $AD = 2x$.

Aussi, on a $OD = R$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHD pour obtenir :

$OD^2 = OH^2 + HD^2$

$HD^2 = OD^2 - OH^2$

$HD^2 = R^2 - x^2$

Comme $HD \geq 0$, on en déduit que $HD = \sqrt{R^2 - x^2}$ puis que $CD = 2HD = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

2) On a $A_{ABCD} = 2x \times 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Ainsi, l'aire sera maximale lorsque f(x) sera maximale.

Remarque : Dès l'année prochaine, des outils supplémentaires vous permettront d'étudier facilement ce genre de fonction.

R.Flouret

B) On applique le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ABD, AHO et AHD pour obtenir :

$$\begin{array}{lll} BD^2 = AB^2 + AD^2 & & 4R^2 = AB^2 + AD^2 \quad (1) \\ OA^2 = AH^2 + HO^2 & \text{donc} & R^2 = x^2 + HO^2 \quad (2) \\ AD^2 = AH^2 + HD^2 & & AD^2 = x^2 + HD^2 \quad (3) \end{array}$$

On déduit de (2) que $HO^2 = R^2 - x^2$ donc $HO = \sqrt{R^2 - x^2}$

Comme $O \in [HD]$, on a $DH = HO + OD$ donc $DH = \sqrt{R^2 - x^2} + R$

A partir de (3), on en déduit que $AD^2 = x^2 + \left(\sqrt{R^2 - x^2} + R\right)^2 = x^2 + R^2 - x^2 + R^2 + 2R\sqrt{R^2 - x^2}$ donc $AD^2 = 2R\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)$. Ainsi, $AD = \sqrt{2R\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)}$

(1) nous donne $AB^2 = 4R^2 - AD^2 = 4R^2 - 2R\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right) = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)$. Ainsi, $AB = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)}$

On a $A_{ABCD} = AB \times AD$

$$A_{ABCD} = \sqrt{2R\left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)} \times \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)}$$
$$A_{ABCD} = \sqrt{4R^2\left(R^2 - R^2 + x^2\right)}$$
$$A_{ABCD} = 2Rx$$

L'aire est donc maximale lorsque $x = R$ et vaut $2R^2$. Le rectangle obtenu est alors un carré.