Brevet 1995 : Bordeaux

I) Activités numériques

Exercice 1 :

Calculer les valeurs exactes des nombres suivants (on donnera les résultats sous forme fractionnaire irréductible)

$$A = -\frac{7}{5} \times \left(3 - \frac{8}{21}\right) \qquad B = \left(2 - \frac{1}{3}\right) \div \left(5 + \frac{5}{6}\right)$$

Écrire les nombres suivants sous la forme $p\sqrt{3}$ où p est un entier relatif.

$$C = \left(6 + 2\sqrt{3}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \sqrt{27} + 7\sqrt{75} - \sqrt{300}$$

Exercice 2 :

Soit $E = (4x+5)^2 - (3x-2)^2$

1) Développer E et réduire.

2) Factoriser E.

3) Résoudre l'équation $(7x+3)(x+7) = 0$.

Exercice 3 :

a) Résoudre le système : $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$

b) Dans un concours hippique un cavalier est pénalisé :

- quand le cheval refuse de sauter un obstacle
- quand le cheval fait tomber la barre.

Le cheval de Pierre a fait 2 refus et a fait tomber 3 barres pour un total de 18 points de pénalité.
Le cheval de Jean a fait 1 refus et a fait tomber 4 barres pour un total de 19 points.

Combien de points coûte un refus ? Combien de points coûte la chute d'une barre ?

II) Activités Géométriques :

Exercice 1 :

Soit (O, I, J) un repère orthonormal.

1) Placer les points A, D, E, qui ont pour coordonnées :

$A(-4 ; -2)$; $D(8 ; 2)$; $E(0 ; 6)$.

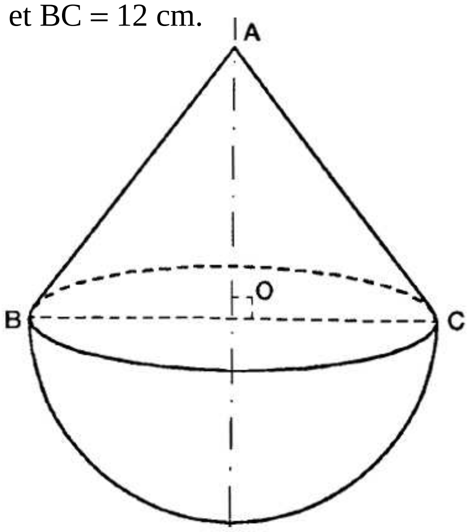
2) Calculer les distances EA, ED et AD. En déduire la nature du triangle AED.

3) Montrer que le point B de coordonnées (2 ; 0) est le milieu du segment [AD].

4) Écrire une équation de la droite (EA).

Exercice 2 :

Un jouet (nommé culbuto) est formé d'une demi-boule surmontée d'un cône comme l'indique la figure ci-dessous. On donne AB = 10 cm et BC = 12 cm.



1) Calculer la distance AO.

2) Quel est le volume du jouet, arrondi au cm^3 près ?

Rappels :

- Volume de la sphère de rayon R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

- Volume d'un cône de révolution d'aire de base B et de hauteur h : $V = \frac{1}{3}hB$

3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

R.Flouret

Problème :

C_1 est un cercle de centre O et de rayon 7,5 cm. [AB] est un diamètre de C_1.
E est le point du segment [OB] tel que OE = 5 cm.

C_2 est le cercle de centre E passant par B ; il recoupe [OB] en N.

1) a) Faire la figure.

b) Construire un point M de C_2 situé à 4 cm de B. La droite (BM) coupe C_1 en P.

Quelle est la nature du triangle NMB ? Celle du triangle APB ? Justifier les réponses.

2) Calculer la distance MN.

3) Démontrer que les droites (AP) et (NM) sont parallèles.

En déduire la distance BP.

4) Démontrer que les droites (PO) et (ME) sont parallèles.

5) La droite (PO) coupe C_1 en K. (PN) coupe (BK) en I.

Évaluer le rapport $\frac{\text{BN}}{\text{BO}}$. En déduire que N est le centre de gravité du triangle PKB.

Démontrer que I est le milieu de [BK].

I) Activités numériques

Corrigé 1 :

$$A=-\frac{7}{5}\times\left(3-\frac{8}{21}\right)$$
$$A=-\frac{7}{5}\times\left(\frac{3\times21}{21}-\frac{8}{21}\right)$$
$$A=-\frac{7}{5}\times\left(\frac{63-8}{21}\right)$$
$$A=-\frac{7}{5}\times\left(\frac{55}{21}\right)$$
$$A=-\frac{7\times5\times11}{5\times3\times7}$$
$$A=-\frac{11}{3}$$

$$B=\left(2-\frac{1}{3}\right)\div\left(5+\frac{5}{6}\right)$$
$$B=\left(\frac{2\times3}{3}-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{5\times6}{6}+\frac{5}{6}\right)$$
$$B=\left(\frac{6-1}{3}\right)\div\left(\frac{30+5}{6}\right)$$
$$B=\frac{5}{3}\div\frac{35}{6}$$
$$B=\frac{5}{3}\times\frac{6}{35}$$
$$B=\frac{5\times2\times3}{3\times7\times5}$$
$$B=\frac{2}{7}$$

$$C=\left(6+2\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2$$
$$C=6^2+2\times6\times2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2-4^2\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$C=36+24\sqrt{3}+4\times3-16\times3$$
$$C=36+12-48+24\sqrt{3}$$
$$C=24\sqrt{3}$$

$$D=\sqrt{27}+7\sqrt{75}-\sqrt{300}$$
$$D=\sqrt{9\times3}+7\sqrt{25\times3}-\sqrt{100\times3}$$
$$D=\sqrt{9}\sqrt{3}+7\sqrt{25}\sqrt{3}-\sqrt{100}\sqrt{3}$$
$$D=3\sqrt{3}+7\times5\sqrt{3}-10\sqrt{3}$$
$$D=3\sqrt{3}+35\sqrt{3}-10\sqrt{3}$$
$$D=28\sqrt{3}$$

Corrigé 2 :

1) $E=(4x+5)^2-(3x-2)^2$
$$E=(4x)^2+2\times4x\times5+25-\left[(3x)^2-2\times3x\times2+4\right]$$
$$E=16x^2+40x+25-9x^2+12x-4$$
$$E=7x^2+52x+21$$

2) $E=(4x+5)^2-(3x-2)^2$
$$E=(4x+5+3x-2)(4x+5-3x+2)$$
$$E=(7x+3)(x+7)$$

3) $(7x+3)(x+7)=0$
Or, si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul

On a donc soit $7x+3=0$ soit $x+7=0$

$7x=-3$ $\quad$ $x=-7$

$x=-\frac{3}{7}$

Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{3}{7}$ et -7.

Corrigé 3 :

a) $\begin{cases} 2x+3y=18 \\ x+4y=19 \end{cases}$

La deuxième équation nous donne $x=19-4y$. En remplaçant la valeur de x dans la première équation, on obtient : $2\times(19-4y)+3y=18$

$38-8y+3y=18$

$8y-3y=38-18$

$5y=20$

$y=\frac{20}{5}$

$y=4$

On remplace y par 4 dans $x=19-4y$ pour obtenir $x=19-4\times4=3$

Vérification :

$2x+3y=2\times3+3\times4=18$

$x+4y=3+4\times4=19$

b) Soit x le nombre de points que coûte un refus et soit y le nombre de points que coûte la chute d'une barre.

On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=18 \\ x+4y=19 \end{cases}$.

D'après a), on en déduit qu'un refus coûte 3 points et la chute d'une barre coûte 4 points.

II) Activités géométriques

Corrigé 1 :

1) On a : $EA=\sqrt{(x_A-x_E)^2+(y_A-y_E)^2}$

$EA=\sqrt{(-4-0)^2+(-2-6)^2}$

$EA=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}$

$EA=\sqrt{16+64}$

$EA=\sqrt{80}$

$ED=\sqrt{(x_D-x_E)^2+(y_D-y_E)^2}$

$ED=\sqrt{(8-0)^2+(2-6)^2}$

$ED=\sqrt{8^2+(-4)^2}$

$ED=\sqrt{64+16}$

$ED=\sqrt{80}$

$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}$

$AD=\sqrt{(8-(-4))^2+(2-(-2))^2}$

$AD=\sqrt{(8+4)^2+(2+2)^2}$

$AD=\sqrt{12^2+4^2}$

$AD=\sqrt{144+16}$

$AD=\sqrt{160}$

On constate que $EA=ED$. Le triangle AED est donc isocèle en E.

Dans le triangle AED, [AD] est le côté le plus long.
On a $AD^2=160$
De plus, $EA^2+ED^2=80+80=160$
On constate que $AD^2=EA^2+ED^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle AED est rectangle en E.

Ainsi, AED est un triangle rectangle isocèle en E.

2) Les coordonnées du milieu de [AD] sont $\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)$.

Or $\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$ et $\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$

On en déduit que le point B de coordonnées (2 ; 0) est le milieu du segment [AD]

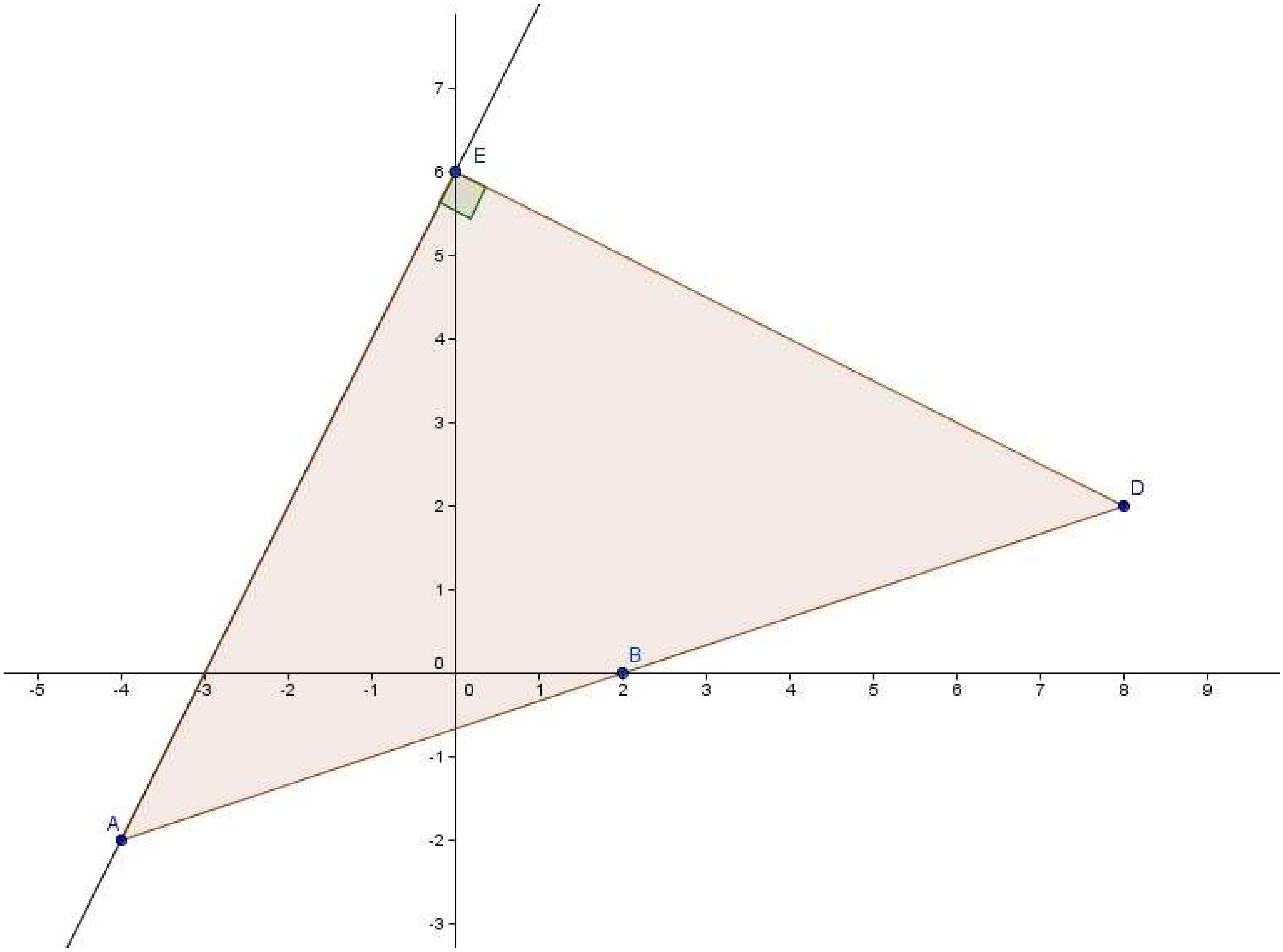
3) (EA) a une équation de la forme $y=ax+b$.

Le coefficient directeur de la droite (EA) est $a=\frac{y_A-y_E}{x_A-x_E}$.

Or $\frac{y_A-y_E}{x_A-x_E}=\frac{-2-6}{-4-0}=\frac{-8}{-4}=2$
Donc $y=2x+b$

Comme $E\in(EA)$, on a $y_E=2x_E+B$ d'où $6=0+b$ donc $b=6$.

Une équation de la droite (EA) est donc : $y=2x+6$



Corrigé 2 :

1) O est le centre du cercle de diamètre [BC] donc $OB = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$

Le triangle AOB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$
$$AO^2 = AB^2 - OB^2$$
$$AO^2 = 10^2 - 6^2$$
$$AO^2 = 100 - 36$$
$$AO^2 = 64$$
$$AO = \sqrt{64}$$
$$AO = 8cm$$

2) Soient V le volume du jouet, V_1 le volume du cône, V_2 le volume de la demi-boule.
On a donc $V = V_1 + V_2$

Or $V_1 = \frac{1}{3} \times OA \times \pi \times OB^2$ et $V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times OB^3$ (nous considérons la moitié du volume de la sphère)

$$V_1 = \frac{8 \times \pi \times 6^2}{3} \qquad V_2 = \frac{2}{3} \pi \times 6^3$$

$$V_1 = \frac{288}{3} \pi \qquad V_2 = \frac{432}{3} \pi$$

$$V_1 = 96\pi \qquad V_2 = 144\pi$$

On en déduit que $V = 96\pi + 144\pi$

$$V = 240\pi$$

$$V \approx 753{,}982 cm^3$$

Le volume du jouet est donc de 240π cm^3 soit environ $753{,}982$ cm^3.

3) ABC est un triangle isocèle en A et (OA) est la hauteur issue de A.
On en déduit donc que (OA) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

On a donc $\widehat{\text{BAC}} = 2\widehat{\text{BAO}}$

Le triangle ABO est rectangle en O.
$\cos(\widehat{\text{BAO}}) = \frac{OA}{AB} = \frac{8}{10}$

On en déduit que $\widehat{\text{BAO}} \approx 37°$ donc $\widehat{\text{BAC}} = 2\widehat{\text{BAO}}$

$$\widehat{\text{BAC}} \approx 2 \times 37$$

$$\widehat{\text{BAC}} \approx 74°$$

Problème :

1) a) Voir à la fin

b) M appartient au cercle de diamètre [NB]

D'après la réciproque de la propriété de l'angle droit

J'en conclus que $\widehat{NMB} = 90°$ donc le triangle NMB est rectangle en M.

P appartient au cercle de diamètre [AB]

D'après la réciproque de la propriété de l'angle droit

J'en conclus que $\widehat{APB} = 90°$ donc le triangle APB est rectangle en P.

2) [AB] est un diamètre de C_1 donc $OB = 7{,}5cm$
$E \in [OB]$ donc $OB = OE + EB$ d'où $EB = OB - OE = 7{,}5 - 5 = 2{,}5cm$
[NB] est un diamètre de C_2 donc $NB = 2EB = 2 \times 2{,}5 = 5cm$

NMB est un triangle rectangle en M.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$NB^2 = MN^2 + MB^2$

$MN^2 = NB^2 - MB^2$

$MN^2 = 5^2 - 4^2$

$MN^2 = 25 - 16$

$MN^2 = 9$

$MN = \sqrt{9}$

$MN = 3cm$

3) APB est un triangle rectangle en P donc (AP)⊥(PB)
NMB est un triangle rectangle en M donc (NM)⊥(MB)
De plus, $P \in (BM)$ donc (NM)⊥(PB)

On a donc (AP)⊥(PB) et (NM)⊥(PB)

Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles

J'en conclus que (AP)//(NM)

Les droites (PM) et (AN) sont sécantes en B et (AP)//(NM)
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BM}{BP} = \frac{BN}{BA} = \frac{NM}{AP}$$

<u>Calcul de BP :</u>

$\frac{4}{BP} = \frac{5}{15}$ donc $BP \times 5 = 4 \times 15$

$$BP = \frac{4 \times 15}{5}$$

$$BP = 12cm$$

4) On a $\frac{BM}{BP} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $\frac{BE}{BO} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{2,5}{2.5 \times 3} = \frac{1}{3}$

Sur les droites (PM) et (OE) sécantes en B, les points B, M, P d'une part et B, E, O d'autre part sont alignés dans le même ordre et $\frac{BM}{BP} = \frac{BE}{BO}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès,

Les droites (ME) et (OP) sont parallèles.

5) On a $\frac{BN}{BO} = \frac{5}{7,5} = \frac{2,5 \times 2}{2,5 \times 3} = \frac{2}{3}$.

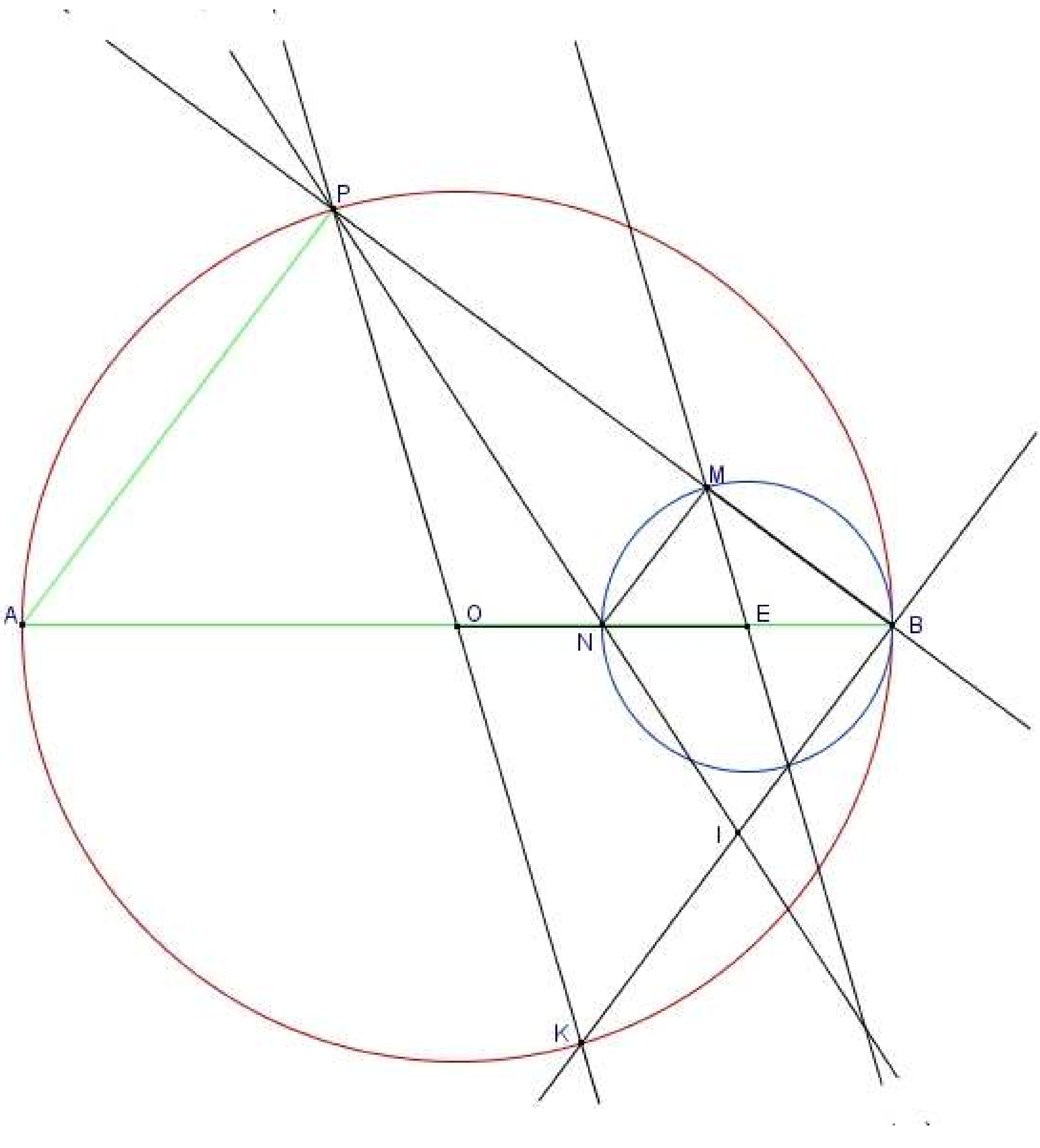
On en déduit que $BN = \frac{2}{3} BO$

La droite (PO) coupe C_1 en K donc O est le milieu de [PK].
(OB) est donc la médiane issue de B dans le triangle PKB.
On a $N \in [BO]$ et $BN = \frac{2}{3} BO$
On en déduit que N est le centre de gravité du triangle PKB.

(NP) est la médiane issue de P dans le triangle PKB. Elle coupe donc [BK] en son milieu.

Or (PN) coupe (BK) en I

J'en conclus que I est le milieu de [BK]



R.Flouret