1) $\forall t \in [0;1]$, on a $X = X\chi_{X<tE[X]} + X\chi_{X\geq tE[X]} \leq tE[X] + X\chi_{X\geq tE[X]}$.

On en déduit que $E[X] \leq tE[X] + E[X\chi_{X\geq tE[X]}]$ donc $(1-t)E[X] \leq E[X\chi_{X\geq tE[X]}]$

2) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a également :

$$
\begin{aligned}
\left(E[X\chi_{X\geq tE[X]}]\right)^2 &\leq E[X^2]E[\chi_{X\geq tE[X]}] \\
&\leq \mathrm{E}[\mathrm{X}^2]P(X \geq tE[X])
\end{aligned}
$$

3) Il découle de 1) et 2) que $(1-t)^2(E[X])^2 \leq E[X^2]P(X \geq tE[X])$.

On en déduit que $P(X \geq tE[X]) \geq \dfrac{(1-t)^2(E[X])^2}{E[X^2]}$

4) Si $X \sim \varepsilon(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ donc $E[X^2] = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Il en découle que $\forall t \in [0;1], P(X \geq \dfrac{t}{\lambda}) \geq \dfrac{(1-t)^2}{2}$.

Si $a = \dfrac{t}{\lambda}$, on obtient pour tout $0 \leq a \leq \dfrac{1}{\lambda}, P(X \geq a) \geq \dfrac{(1-a\lambda)^2}{2}$

<u>Notation :</u> χ représente la fonction indicatrice.