

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 = 1$. On pose

$$U = aX - bZ, \quad V = cY, \quad W = bX + aZ.$$

Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et calculer $\mathbb{E}[U|X]$ et $\mathbb{E}[X|U]$.