Si X est une variable aléatoire positive, on va montrer l'inégalité de Paley-Zygmund qui nous apprend que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]) \geq (1-t)^2 \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

1) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$(1-t)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X \mathrm{I}_{\{X \geq t\mathbb{E}[X]\}}].$$

2) Montrer ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(\mathbb{E}[X \mathrm{I}_{\{X \geq t\mathbb{E}[X]\}}])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\, \mathbb{P}(X \geq t\mathbb{E}[X]).$$

3) En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund.

4) Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, montrer que pour tout $0 \leq a \leq 1/\lambda$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \geq \frac{1}{2}(1 - a\lambda)^2.$$