Partie I :

1) Supposons que le produit (p_n) converge. On a $\forall n \geq 2, U_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$. Comme le produit (p_n) converge, on en déduit qu'il existe $l \neq 0 / \lim_{n\to+\infty} p_n = l$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1$.

On en déduit que si le produit (p_n) converge, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

2) On a $1+\frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$ d'où $p_n = \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n+1}{n} = n+1$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

3) On a $p_n = \cos(\frac{a}{2})\times\ldots\times\cos(\frac{a}{2^{n-1}})\times\cos(\frac{a}{2^n})$ donc $p_n \sin(\frac{a}{2^n}) = \cos(\frac{a}{2})\times\ldots\times\cos(\frac{a}{2^{n-1}})\times\cos(\frac{a}{2^n})\times\sin(\frac{a}{2^n})$.

On applique la formule $\frac{\sin(2x)}{2} = \cos(x)\sin(x)$ pour obtenir $\cos(\frac{a}{2^n})\times\sin(\frac{a}{2^n}). = \frac{\sin(\frac{a}{2^{n-1}})}{2}$.

On a donc $p_n \sin(\frac{a}{2^n}) = \cos(\frac{a}{2})\times\ldots\times\cos(\frac{a}{2^{n-1}})\times\frac{\sin(\frac{a}{2^{n-1}})}{2}$ et on réitère la formule pour finalement obtenir :

$p_n \sin(\frac{a}{2^n}) = \frac{\sin(a)}{2^n}$. Pour être totalement clean, il faudrait faire une jolie récurrence que je vous laisse le soin de faire.

a n'étant pas un multiple de π, on en déduit que $\frac{a}{2^n}$ n'en est pas un non plus. On a donc $\sin(\frac{a}{2^n}) \neq 0$.

Par suite, $p_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}$.

On a $2^n \sin(\frac{a}{2^n}) = a\frac{\sin(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n} = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin(\frac{a}{2^n}) = a$.

Partie II :

1) (a) Puisque (U_n) converge vers 1,on a par définition de la limite :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N / \forall n \in N, n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 1| < \varepsilon$.

Comme $|U_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon < U_n < 1+\varepsilon$, on en déduit le résultat voulu en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ par exemple.

(b) Supposons que (S_n) soit convergente. On a $\forall n \geq n_0 \quad p_n = \underbrace{\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p}_{=A} \prod_{p=n_0}^{n} u_p$. Par définition, (U_p) ne s'annule jamais donc $A \neq 0$.

Aussi, $\forall n \geq n_0 \prod_{p=n_0}^{n} u_p = e^{\ln(\prod_{p=n_0}^{n} u_p)} = e^{\sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)} = e^{S_n}$.

La convergence de (S_n) et la continuité de l'exponentielle nous assure que (p_n) est convergente, de limite non

nulle (car $A \neq 0$).
Réciproquement, supposons que le produit (p_n) soit convergent. Soit $l \in R^*$ sa limite.

On a $\forall n \geq n_0, p_n = \underbrace{\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p}_{=A\neq 0} \prod_{p=n_0}^{n} u_p$ donc $\forall n \geq n_0, \prod_{p=n_0}^{n} u_p = \frac{p_n}{A}$.

En composant avec ln, on obtient $\forall n \geq n_0, S_n = \ln(\frac{p_n}{A})$.

Comme $l \neq 0$ et ln est continue en $\frac{l}{A} > 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(\frac{l}{A})$.
L'équivalence est ainsi démontrée.
On obtient de plus : $\lim_{n\to+\infty} p_n = \left(\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p\right) e^{\lim_{n\to+\infty} S_n}$.

2) (a) La fonction f définie sur R_+^* par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e;+\infty[$ (faire une étude de fonction classique pour s'en convaincre).
Soit $p \geq 3$. Comme $e \leq 3$, f est décroissante sur $[p; p+1]$.
On en déduit donc que $\forall x \in [p; p+1], \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(p)}{p}$ puis par intégration, $\int_p^{p+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \int_p^{p+1} \frac{\ln(p)}{p} dx = \frac{\ln(p)}{p}$.
(b) La question précédente nous permet d'écrire ;
$\forall n \geq 3, S_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{p=3}^{n} \frac{\ln(p)}{p} \geq \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{p=3}^{n} \int_p^{p+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$.
Or $\sum_{p=3}^{n} \int_p^{p+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_{p=3}^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_3^{n+1} = \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2 3$.
Ainsi, $S_n \geq \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2 3$
Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que (S_n) diverge.

On a $\sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{\ln(p)}{p}}$ donc $\lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{p} = 1$. Les hypothèses de la question 1 s'appliquent. On en déduit que le produit (p_n) diverge.

Partie III :

1) (a) On utilise la stricte concavité de la fonction f définie sur R_+ par $f(x) = \ln(1+x)$.
La tangente à C_f en x=0 a pour équation y=x d'où le résultat.

(b) $S'_{n+1} - S'_n = v_{n+1} \geq 0$ donc (S'_n) est croissante.

(c) Supposons que (S'_n) converge. Puisque (S'_n) est en plus croissante, on en déduit qu'elle est majorée.
Ainsi, $\exists M \in R / \forall n \in N, S'_n \leq M$. (p_n) est une suite de termes strictements positifs. De plus, $\forall n \in N^*, \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} \geq 1$. On en déduit que (p_n) est croissante.

En utilisant la question 1)a), on a : $\forall n \in N^*, \ln(p_n) = \sum_{p=1}^{n} \ln(1+v_p) \leq \sum_{p=1}^{n} v_p \leq M$.

Ainsi, $\forall n \in N^*, p_n \leq e^M$.

On en déduit que (p_n) est croissante et majorée : elle converge.

2) (S'_n) est croissante. Elle est donc soit majorée, soit divergente vers $+\infty$.

Supposons qu'elle soit majorée. Elle est donc convergente.

D'après la question précédente, on en déduit que le produit $\prod_{p=1}^{n}(1+\frac{1}{p})$ est convergent ce qui est absurde d'après la question 2 de la première partie.

Ainsi, (S'_n) diverge.

3) (a) Supposons $a \geq 1$. On a alors $\forall p \geq 1, 1+a^{2^p} \geq 2$ donc la suite $(1+a^{2^p})$ ne converge pas vers 1.

D'après la question 1 de la première partie, on en déduit que si $a \geq 1$, alors le produit (p_n) diverge.

(b) i) Comme $a \in]0;1[$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc $\lim_{p\to+\infty} 1+a^{2^p} = 1$

On se retrouve dans le cas de la question 1. Il suffit donc de montrer la suite $(\sum_{p=1}^{n} a^{2^p})$ est convergente .

Cette suite est clairement croissante. Comme $2^p \geq p$, on en déduit que $a^{2^p} \geq a^p$ d'où

$$\sum_{p=1}^{n} a^{2^p} \leq \sum_{p=1}^{n} a^p = a \times \frac{1-a^n}{1-a} \leq \frac{a}{1-a}.$$

La suite $(\sum_{p=1}^{n} a^{2^p})$ est donc croissante et majorée. Elle converge. Ainsi, si $a \in]0;1[$, alors le produit (p_n) converge.

ii) On a $p_n = (1+a^2)\times(1+a^4)\times...\times(1+a^{2^p})$ donc $(1-a^2)p_n = (1-a^2)(1+a^2)\times(1+a^4)\times...\times(1+a^{2^p})$.

Or $(1-a^2)(1+a^2) = 1-a^4$ d'où $(1-a^2)p_n = (1-a^4)\times(1+a^4)\times...\times(1+a^{2^p})$ puis on réitère l'identité remarquable pour finalement obtenir $(1-a^2)p_n = 1-a^{2^{n+1}}$.

Par passage à la limite, comme $a \in]0;1[$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}_n = \frac{1}{1-a^2}$