1) On a immédiatement $I_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})$.

Une intégration par parties nous donne : $I_1 = \frac{1}{4}(1+e^{-2})$

2) On a $I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 x(1-x)^n e^{-2x} dx$. Comme $x \in [0;1]$, on en déduit que $(1-x)^n \geq 0$ et $x \geq 0$.
Ainsi, $I_{n+1} - I_n \leq 0$. (I_n) est donc décroissante.

3) De manière évidente, $I_n \geq 0$. (I_n) est donc décroissante et minorée. Elle converge.

4) $x \in [0;1]$, on a $e^{-2x} \leq 1$ d'où $(1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$.
On en déduit que $I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$. La question précédente donne l'autre côté de l'inégalité.
Par passage à la limite, on en déduit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

5) Le résultat se démontre en utilisant une intégration par parties.

6) D'après la question précédente, $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$.
La question 4) nous permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$.
Par suite, $\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$

7)D'après la question 5), $n(nI_n - 1) = -n(I_n + 2I_{n+1})$
Or $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n + 2I_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 3I_n$ d'où $\lim_{n\to+\infty} n(nI_n - 1) = \lim_{n\to+\infty} -3nI_n = -3$

8) On a $\lim_{n\to+\infty} I_n = a$ donc $a = 0$.
On a $nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = b = 1$
De plus, $n(nI_n - 1) = c + \varepsilon(n)$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n(nI_n - 1) = c = -3$