Brevet 1993 : Bordeaux

I) Activités numériques

Exercice 1 :

Soit l'expression $E = x^2 - 4x + 4$
Calculer E pour :

a) $x = 2\sqrt{3}$,
b) $x = \left(-\frac{2}{3}\right)$,

Factoriser E.
Résoudre l'équation E = 4.

Exercice 2 :

Le chiffre d'affaires de Mac Donald a été en 1990 de 20 milliards de dollars. Il correspond environ à 10 % du budget de la France. Calculer le montant du budget de la France en dollars puis en francs : (on donnera l'écriture scientifique des résultats ; on prendra 5,44 F pour valeur du dollar).

Exercice 3 :

Plusieurs amis veulent offrir un disque à Jean pour son anniversaire.
• Si chacun verse 20 F, il manquera 12 F.
• Si chacun verse 25 F, il y a 18 F de trop.

Calculer le prix du disque et le nombre des amis de Jean.

II) Activités Géométriques :

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormal (O, I, J), soit le point A de coordonnées $(0 ; -1)$

1) Montrer que la droite (AI) a pour équation $y = x - 1$

2) Construire la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$

3) Calculer les coordonnées du point F commun à (AI) et (D).

Exercice 2 :

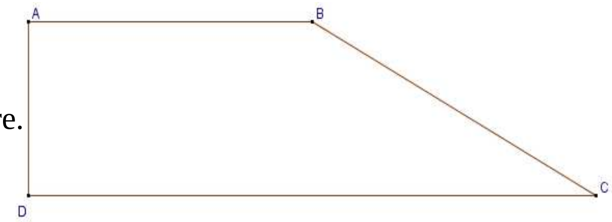
1) Construire un triangle ABC tel que AB = 10,2cm, AC =9cm et BC = 4,8cm (*on indiquera les détails de la construction*)

2) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
   b) Soit I le milieu de [AB]. Quelle est la longueur de CI ? Justifier.

3) a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CJ}$
   b) Montrer que AICJ est un losange.

Exercice 3 :

ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD] tel que :
AB = 4cm, DC = 8cm et AD = 3cm
Faire un dessin en vraie grandeur et compléter au fur et à mesure.



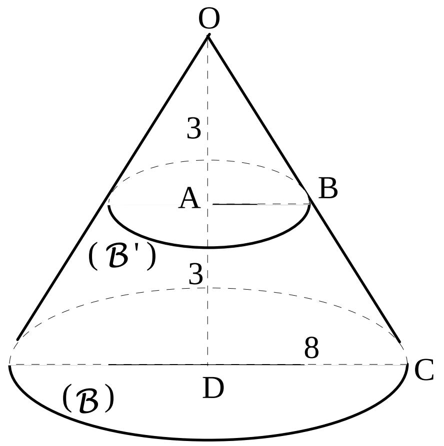
1) Les diagonales du trapèze se coupent en G.
   Montrer que $\frac{GA}{GC} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$

2) Les demi droites [DA) et [CB) se coupent en O. Montrer que A est le milieu de [OD] et B celui de [OC].

3) Montrer que la droite (OG) coupe le segment [DC] en son milieu.

<u>Problème :</u>

Dans l'espace, en tournant autour de la droite (OD), le triangle ODC rectangle en D engendre un cône de révolution ($\mathscr{C}$). Son sommet est le point O et sa base le disque ($\mathscr{B}$) de centre D et de rayon DC.



1. Calculer l'aire de ($\mathscr{B}$) arrondie au cm^2 et le volume de ($\mathscr{C}$) arrondi au cm^3

2. Le triangle OAB engendre le cône ($\mathscr{C}$') de sommet O et de base, le disque ($\mathscr{B}$')
On admet que le plan de ($\mathscr{B}$') est parallèle à celui de ($\mathscr{B}$)

a) Par quel nombre faut-il multiplier l'aire de ($\mathscr{B}$) pour obtenir l'aire de ($\mathscr{B}$') ?

b) Par quel nombre faut-il multiplier le volume de ($\mathscr{C}$) pour obtenir le volume de ($\mathscr{C}$') ?

I) Activités numériques

Corrigé 1 :

a) Pour $x = 2\sqrt{3}$, on a $E = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 2\sqrt{3} + 4$

$$E = 2^2\left(\sqrt{3}\right)^2 - 8\sqrt{3} + 4$$
$$E = 4\times 3 - 8\sqrt{3} + 4$$
$$E = 12 - 8\sqrt{3} + 4$$
$$E = 16 - 8\sqrt{3}$$

b) Pour $x = \left(-\frac{2}{3}\right)$, on a $E = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{2}{3}\right) + 4$

$$E = \frac{4}{9} + \frac{8}{3} + 4$$
$$E = \frac{4}{9} + \frac{8\times 3}{3\times 3} + \frac{4\times 9}{9}$$
$$E = \frac{4 + 24 + 36}{9}$$
$$E = \frac{64}{9}$$

On a $E = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

L'équation $E = 4$ s'écrit $x^2 - 4x + 4 = 4$ soit $x^2 - 4x = 4 - 4$ c'est-à-dire $x(x-4) = 0$
Or, si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul.
donc soit $x = 0$ soit $x - 4 = 0$
$x = 4$
Les solutions de cette équation sont donc 0 et 4.

Corrigé 2 :

On a $20 milliards = 2\times 10^{10}$ et $\frac{10}{100}\times 2\times 10^{10} = 2\times\frac{10^{11}}{10^2} = 2\times 10^{11-2} = 2\times 10^9$
Le buget de la France est donc de 2×10^9 dollars.
1 dollar vaut 5,44 francs donc 2×10^9 dollars vaut $2\times 10^9\times 5{,}44 = 10{,}88\times 10^9 = 1{,}088\times 10^{10}$ francs.
Le budget de la France est donc de $1{,}088\times 10^{10}$ francs.

Corrigé 3 :

Soit x le nombre d'amis de Jean et soir y le prix du disque.

Nous obtenons donc le système suivant : $\begin{cases} 20x = y - 12 \\ 25x = y + 18 \end{cases}$

La première équation nous donne $y = 20x + 12$

En remplaçant la valeur de y en fonction de x dans la 2ième équation, on obtient :

$25x = 20x + 12 + 18$ c'est-à-dire $25x - 20x = 30$ donc $5x = 30$ d'où $x = \frac{30}{5} = 6$

On remplace la valeur de x dans la 1ère équation pour obtenir $y = 20 \times 6 + 12 = 132$.

Le disque vaut donc 132 francs et 6 amis de Jean participent au cadeau.

Vérification :

$20x = 20 \times 6 = 120$ et $y - 12 = 132 - 12 = 120$

$25x = 25 \times 6 = 150$ et $y + 18 = 132 + 18 = 150$

II) Activités géométriques

Corrigé 1 :

1) On a I(1 ;0) et A(0 ;-1). Une équation de la droite (AI) est de la forme $y = ax + b$.

Le coefficient directeur de la droite (AI) est $a = \frac{y_A - y_I}{x_A - x_I}$.

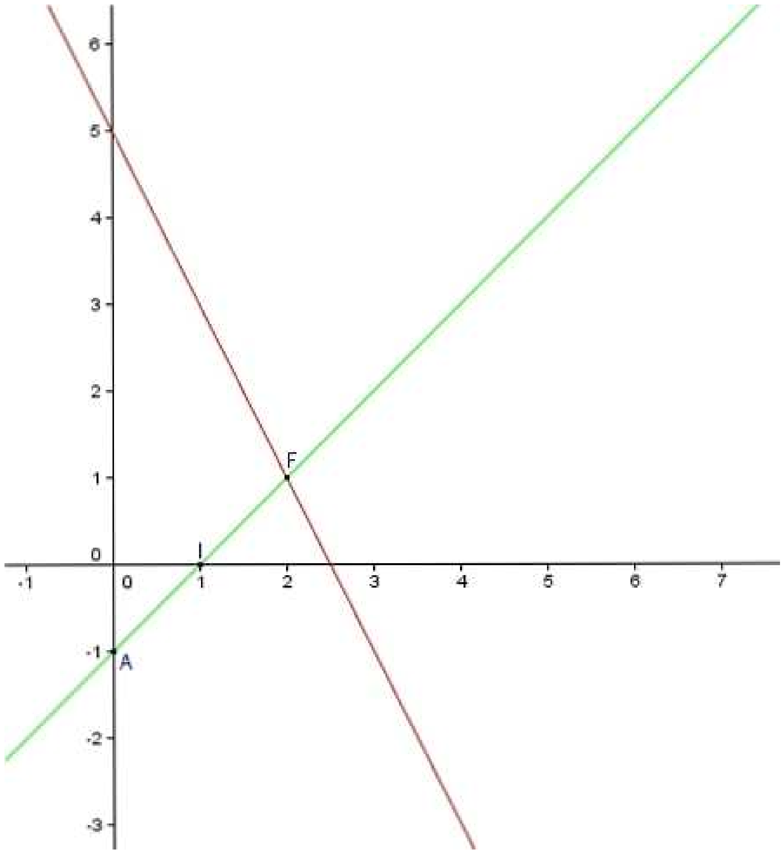
Or $\frac{y_A - y_I}{x_A - x_I} = \frac{-1-0}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

donc $y = x + b$.

Comme $I \in (AI)$, on a $y_I = x_I + b$ d'où $0 = 1 + b$. Ainsi, $b = -1$.

Une équation de la droite (AI) est donc : $y = x - 1$

2)



3) Les coordonnées du point d'intersection des droites (AI) et (D) vérifient $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

En remplaçant la valeur de y en fonction de x dans la deuxième équation, on obtient :

$x - 1 = -2x + 5$

$x + 2x = 5 + 1$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

On remplace la valeur de x dans la première équation pour obtenir $y = 2 - 1$ c'est-à-dire $y = 1$.

On en déduit que F(2 ;1)

Vérification :

$x - 1 = 2 - 1 = 1$
$-2x + 5 = -2 \times 2 + 5 = 1$

Corrigé 2 :

1) Voir à la fin

2) a) Dans le triangle ABC, le côté [AB] est le plus long.
On a $AB^2 = 10{,}2^2 = 104{,}04$
De plus, $AC^2 + BC^2 = 9^2 + 4{,}8^2 = 81 + 23{,}04 = 104{,}04$
On constate que $AB^2 = AC^2 + BC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

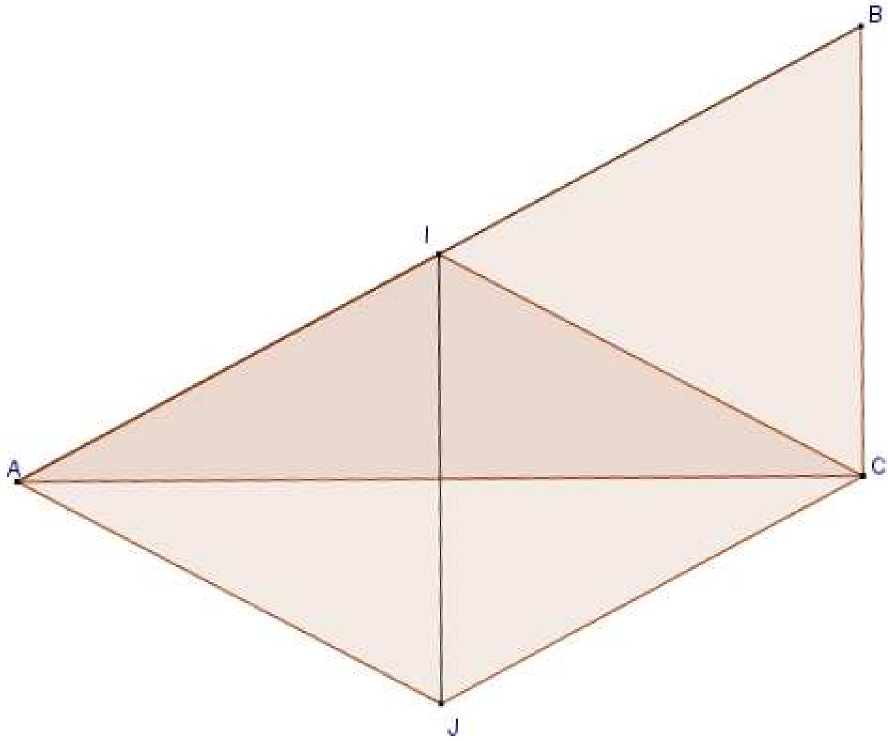
b) Dans le triangle ABC rectangle en C, I est le milieu de [AB].
J'en conclus que (IC) est la médiane relative à l'hypoténuse [AB].
De plus, $AB = 10{,}2cm$.
Or, si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
J'en conclus que $IC = \frac{AB}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1cm$

3) a) Voir fin
b) On a I milieu de [AB] donc $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1cm$
On déduit de la question 2) b) que $IA = IB = IC$.

$\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \overrightarrow{\mathrm{CJ}}$ donc BIJC est un parallélogramme.
Or si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il a ses côtés opposés parallèles et de même longueur donc (IB)//(JC) et $IB = JC$
De plus, I milieu de [AB]
donc (AI)//(JC)

Dans le quadrilatère AICJ, les côtés [AI] et [JC] sont parallèles et de même longueur.
Or, si un quadrilatère a 2 côtés opposés et de même longueur, alors c'est un parallélogramme
donc AICJ est un parallélogramme.

Dans le parallélogramme AICJ, on a $IA = IC$
Or, si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange
donc AICJ est un losange.



Corrigé 3 :

1) ABCD est un trapèze donc (AB)//(DC).

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en G et (AB)//(DC)
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{GA}{GC}=\frac{GB}{GD}=\frac{AB}{DC}$$

Or $\frac{AB}{DC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

donc $\frac{GA}{GC}=\frac{GB}{GD}=\frac{1}{2}$

2) Les droites (AD) et (BC) sont sécante en O et (AB)//(DC).
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{DC}$$

Or $\frac{AB}{DC}=\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\frac{OA}{OD}=\frac{1}{2}$ et $\frac{OB}{OC}=\frac{1}{2}$.

Ainsi, $OA=\frac{OD}{2}$ et $OB=\frac{OC}{2}$.

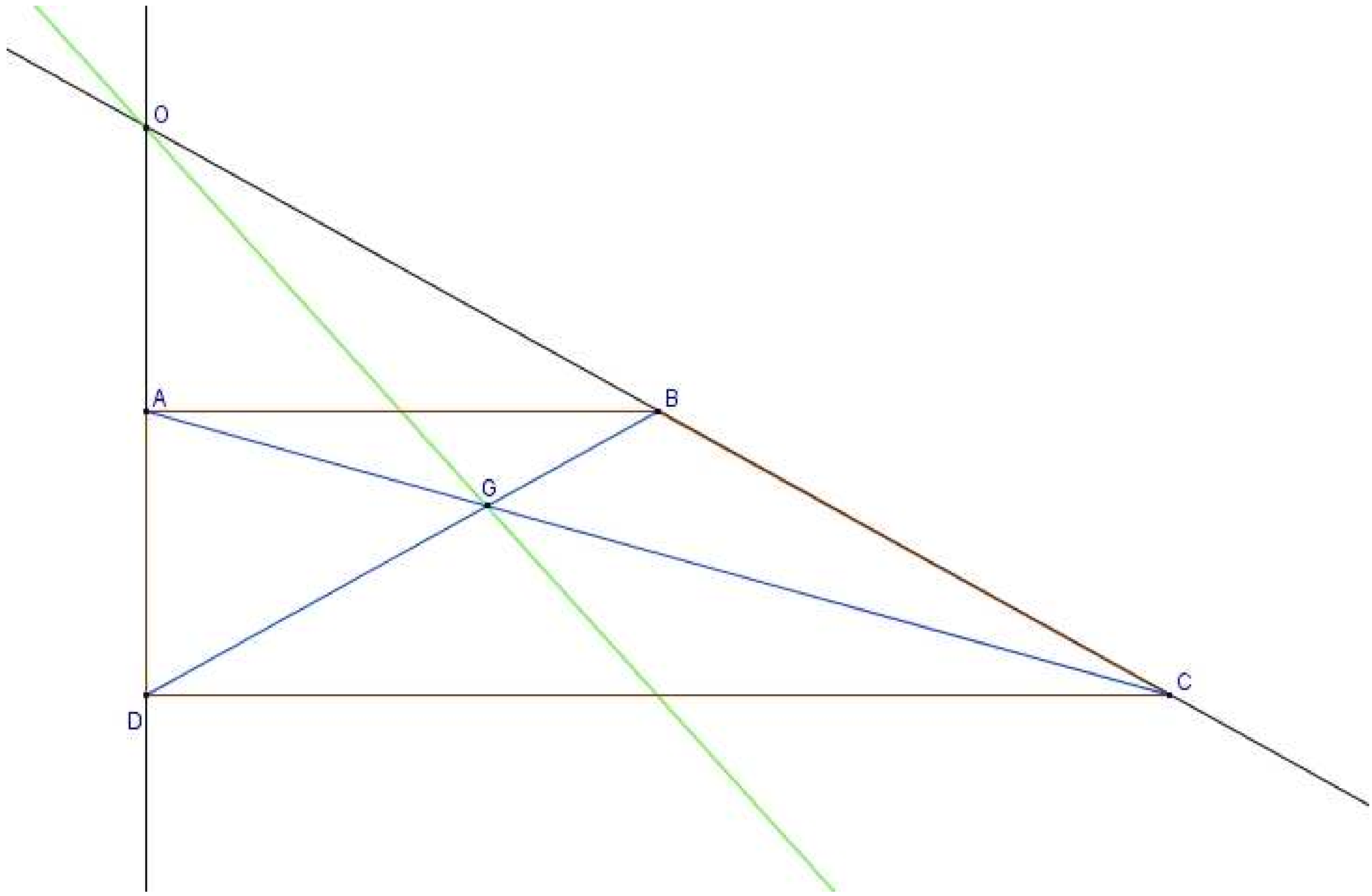
De plus, $A\in[OD]$ et $B\in[OC]$

On en déduit donc que A est le milieu de [OD] et B milieu de [OC]

3) Dans le triangle ODC, A est le milieu de [OD] donc (AC) est la médiane issue de C.
De même, (BD) est la médiane issue de D.

Ces deux droites sont concourantes en G.

On en déduit que la droite (OG) est la médiane issue de O dans le triangle ODC.
Or la médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé donc (OH) coupe le segment [DC] en son milieu.



Problème :

1) On a $A_{\mathrm{B}} = \pi DC^2 = \pi 8^2 = 64\pi$.

L'aire de ($\mathcal{B}$) arrondie au cm^2 est donc de 201 cm^2

Comme $A \in [OD]$, on a $OD = OA + AD = 3 + 3 = 6$ donc $V_C = \dfrac{OD \times A_B}{3} = \dfrac{6 \times 64\pi}{3} = 128\pi$

Le volume de ($\mathcal{C}$) arrondi au cm^3 est donc de 402 cm^3

2) a) Le cône ($\mathcal{C}$') de sommet O et de base le disque ($\mathcal{B}$') est une réduction du cône ($\mathcal{C}$) de sommet O et de base le disque ($\mathcal{B}$).

Le rapport de réduction est $k = \dfrac{OA}{OD}$.

On en déduit que $k = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

Dans le cas d'une réduction, les aires sont multipliées par k^2 .
Ainsi, pour obtenir l'aire de ($\mathcal{B}$'), il faut multiplier l'aire de ($\mathcal{B}$) par $0{,}5^2$ c'est-à-dire par $0{,}25$

b) De même, dans le cas d'une réduction, les volumes sont multipliées par k^3.
Ainsi, pour obtenir le volume de ($\mathcal{C}$'), il multiplier le volume de ($\mathcal{C}$) par $0{,}5^3$ c'est-à-dire par 0,125.