Brevet 1992 : Bordeaux

I) Activités numériques

Exercice 1 :

Effectuer les calculs suivants (on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible)

$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(2 - \frac{7}{2}\right)$ $\qquad$ $B = \frac{18 \times \left(5 \times 10^{-1}\right)^2}{25 \times \left(6 \times 10^{-1}\right)^3}$

Ecrire $C = 2\sqrt{27} - 8\sqrt{48}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.

Calculer $D = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^2$

Exercice 2 :

Développer et réduire $E = (2x-5)^2 - (4x-3)(2x+1)$

Factoriser $F = 16x^2 - 25$ puis $G = (2x-3)(x-8) - (2x-3)(2x+1)$

Résoudre :

a) l'équation $(2x-3)(-x-9) = 0$

b) l'inéquation $3x - 3 \geq 6x + 1$

Exercice 3 :

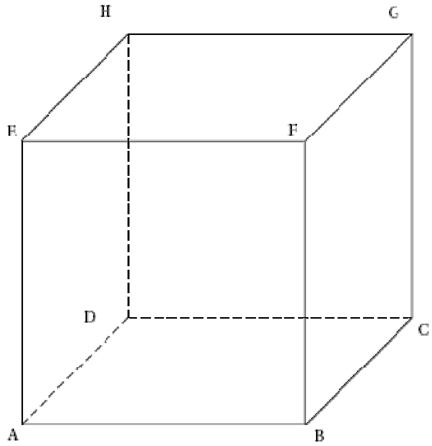
Dans l'après-midi du 24 décembre, au distribanque de la rue des Maths ont été faits les retraits suivants (tous multiples de 200 F). Compléter le tableau suivant :

Sommes retirées en francs	200	400	600	800	1000	1200	1400
Nombres de personnes ayant retiré cette somme	35	40	33	75	25	20	22
Fréquence en % de chaque type de retrait							

1) Faire le diagramme en bâtons des effectifs (on prendra 1 cm pour 10 personnes)

2) Quel est le pourcentage de retraits égaux à 1000 F ou plus ?

II) Activités Géométriques :



Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube d'arête a.

1) Quelle est la nature du triangle EBG ?

2) Exprimer en fonction de a :

a) l'aire du triangle EGF
b) le volume de la pyramide EBGF. *On pourra prendre pour base le triangle EFG.*

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, I, J), I ayant pour coordonnées (1 ;0), soit A(3 ;-4)

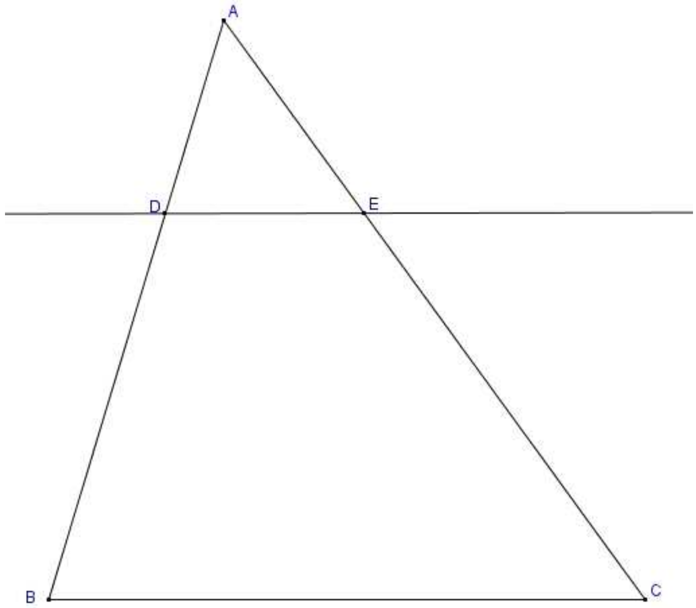
1) Calculer les coordonnées du milieu B de [IA].

2) Déterminer une équation de la droite (IA).

3) Vérifier que la droite (Δ)d'équation $y = 0{,}5x - 3$ est la médiatrice de [IA]

Problème :

Reproduire la figure ci-dessous, la compléter et la joindre à votre copie.



1) D est un point du segment [AB] tel que $AD = \frac{1}{3}AB$; La droite (DE) est parallèle à la droite (BC). Sachant que $BC = 8cm$, calculer la valeur exacte de DE.

2) La bissectrice de l'angle $\widehat{DBC}$ coupe la droite (DE) en F. Montrer que $\widehat{DFB} = \widehat{DBF}$. Quelle est la nature du triangle BDF ? Justifier.

3) J désigne le milieu du segment [BF] et L le symétrique de D par rapport à J. Quelle est la nature du quadrilatère BDFL ? Justifier.
Démontrer que L appartient à la droite (BC).

4) Le cercle de diamètre [BL] coupe la droite (AB) en B et K. Quelle est la nature des triangles BJL et BKL ?

5) Les droites (BJ) et (KL) se coupent en H. Montrer que les droites (DH) et (BL) sont perpendiculaires.

I) Activités numériques

Corrigé 1 :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(2 - \frac{7}{2}\right)$$
$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{2} - \frac{7}{2}\right)$$
$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{4-7}{2}\right)$$
$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$A = \frac{1}{2} + 1$$
$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{18\times\left(5\times10^{-1}\right)^2}{25\times\left(6\times10^{-1}\right)^3}$$
$$B = \frac{18\times0{,}5^2}{25\times0{,}6^3}$$
$$B = \frac{4{,}5}{5{,}4}$$
$$B = \frac{0{,}9\times5}{0{,}9\times6}$$
$$B = \frac{5}{6}$$

$$C = 2\sqrt{27} - 8\sqrt{48}$$
$$C = 2\sqrt{9\times3} - 8\sqrt{16\times3}$$
$$C = 2\sqrt{9}\sqrt{3} - 8\sqrt{16}\sqrt{3}$$
$$C = 6\sqrt{3} - 32\sqrt{3}$$
$$C = -26\sqrt{3}$$

$$D = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^2$$
$$D = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2$$
$$D = 4\times3 - 12\sqrt{3\times2} + 9\times2$$
$$D = 12 - 12\sqrt{6} + 18$$
$$D = 30 - 12\sqrt{6}$$

Corrigé 2 :

$$E = (2x-5)^2 - (4x-3)(2x+1)$$
$$E = (2x)^2 - 2\times2x\times5 + 5^2 - [4x\times2x + 4x - 3\times2x - 3]$$
$$E = 4x^2 - 20x + 25 - [8x^2 + 4x - 6x - 3]$$
$$E = 4x^2 - 20x + 25 - [8x^2 - 2x - 3]$$
$$E = 4x^2 - 20x + 25 - 8x^2 + 2x + 3$$
$$E = -4x^2 - 18x + 28$$

$$F = 16x^2 - 25$$
$$F = (4x^2) - 5^2$$
$$F = (4x-5)(4x+5)$$

$$G = (2x-3)(x-8) - (2x-3)(2x+1)$$
$$G = (2x-3)[x - 8 - (2x+1)]$$
$$G = (2x-3)[x - 8 - 2x - 1]$$
$$G = (2x-3)(-x-9)$$

a) $(2x-3)(-x-9) = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul

Donc soit $2x - 3 = 0$ soit $-x - 9 = 0$

$2x = 3$ $x = -9$

$x = \frac{3}{2}$

Les solutions de l'équation sont donc $x = \frac{3}{2}$ et $x = -9$

b) $3x - 3 \geq 6x + 1$

$-3 - 1 \geq 6x - 3x$

$-4 \geq 3x$

$3x \leq -4$

$x \leq -\frac{4}{3}$

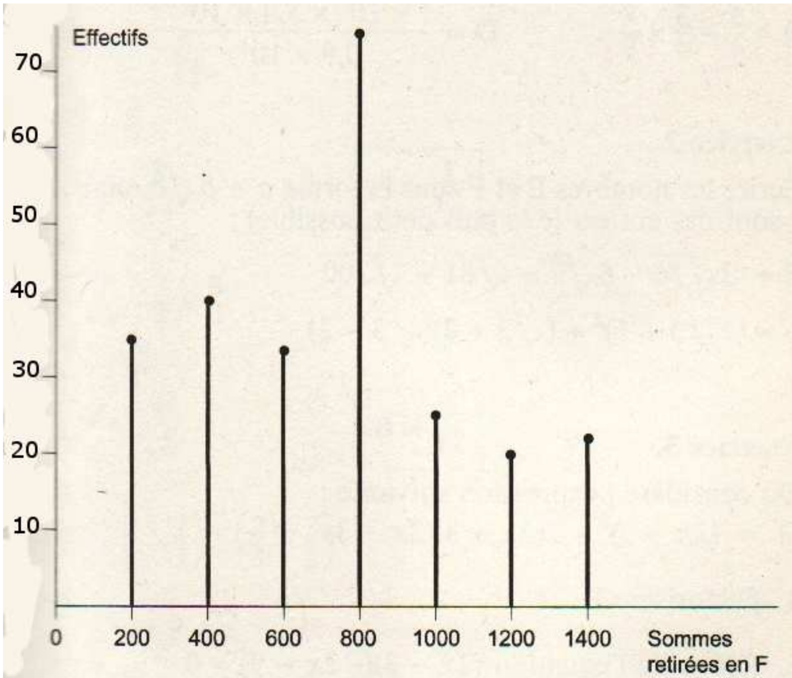
Corrigé 3 :

On a : $35 + 40 + 33 + 75 + 25 + 20 + 22 = 250$. Il y a donc 250 personnes qui ont retiré de l'argent.

Pour avoir la fréquence en %, il faut effectuer le calcul suivant : $\frac{\text{effectif du caractère}}{\text{effectif total}} \times 100$. Nous obtenons facilement le tableau suivant :

Sommes retirées en francs	200	400	600	800	1000	1200	1400
Nombres de personnes ayant retiré cette somme	35	40	33	75	25	20	22
Fréquence en % de chaque type de retrait	14 %	16 %	13,2 %	30 %	10 %	8 %	8,8 %

1)



2) Les personnes qui ont retiré 1000 F ou plus, ont, en fait, retiré 1000 F ou 1200 F ou 1400 F. Il y en a 67 $(25 + 20 + 22)$. Comme $\frac{67}{250} \times 100 = 26{,}8$, on en déduit qu'elles représentent 26,8 % des personnes qui ont retiré de l'argent.

II) Activités Géométriques :

Corrigé 1 :

1) [EB], [EG] et [BG] sont les diagonales de trois carrés dont les côtés sont de même longueur. On a donc $EB = EG = BG$. Le triangle EBG est donc équilatéral.

2) a) $A_{EFG} = \dfrac{EF \times FG}{2}$

$$A_{EFG} = \frac{a \times a}{2}$$

$$A_{EFG} = \frac{a^2}{2}$$

b) $V_{EBGF} = \dfrac{1}{3} \times A_{EGF} \times BF$

$$V_{EBGF} = \frac{1}{3} \times \frac{a^2}{2} \times a$$

$$V_{EBGF} = \frac{a^3}{6}$$

Corrigé 2 :

1) B est le milieu de [IA] donc B$\left(\dfrac{x_A + x_I}{2} ; \dfrac{y_A + y_I}{2}\right)$.

Or $\dfrac{x_A + x_I}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $\dfrac{y_A + y_I}{2} = \dfrac{-4+0}{2} = -2$

donc B(2 ;-2)

2) Une équation de la droite (IA) est de la forme : $y = ax + b$

(IA) a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_A - y_I}{x_A - x_I}$

Or $\dfrac{y_A - y_I}{x_A - x_I} = \dfrac{-4-0}{3-1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Donc $y = -2x + b$

Comme $I \in (IA)$, on a $y_I = -2x_I + b$ d'où $0 = -2 + b$. Ainsi, $b = 2$

On en déduit qu'une équation de la droite (IA) est $y = -2x + 2$

3) Les coordonnées du point B vérifient l'équation de (Δ)donc (Δ) passe par B, milieu de [IA].

On a $-2\times 0{,}5=-1$

Le produit des coefficients directeurs des droites (IA) et (Δ) est donc égale à -1

Les droites (Δ)et (IA) sont donc perpendiculaires.

Ainsi, (Δ) est la médiatrice de [IA].

Problème :

1) Les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et (BC)//(DE)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

Or $AD = \dfrac{1}{3}AB$ donc $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{3}$

Ainsi, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{DE}{BC}$ donc $DE \times 3 = BC$ d'où $DE = \dfrac{BC}{3}$

$$DE = \frac{8}{3}cm$$

2) $\widehat{DFB}$ et $\widehat{FBC}$ sont des angles alternes-internes et (DF)//BC) donc $\widehat{DFB} = \widehat{FBC}$

De plus, (BF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBC}$ donc $\widehat{DBF} = \widehat{FBC}$

On en déduit que $\widehat{DBF} = \widehat{DFB}$

Le triangle BDF est donc isocèle en D.

3) L est le symétrique de D par rapport à J donc J est le milieu de [LD]

Dans le quadrilatère BDFL, J est le milieu des diagonales [LD] et [BF]

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallégramme.

On en déduit que BDFL est un parallélogramme.

Dans le triangle BDF isocèle en D, J est le milieu de [BF] donc (DJ) est la médiane issue de D.

BDF étant isocèle en D, (JD) est aussi la médiatrice du segment [BF].

Or la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu

Donc (JD)$\perp$(BF)

De plus, $L \in (JD)$

On en déduit que (LD)$\perp$(BF)

Dans le parallélogramme BDFL, les diagonales [LD] et [BF] sont perpendiculaires.

Or, si un parallélogramme a ses diagonales qui sont perpendiculaires, alors c'est un losange

donc BDFL est un losange.

BDFL est un losange donc (DF)//(BL)

De plus, (DF)//(BC)

donc $L \in (BC)$.

4) D’après la question précédente, (LD)$\perp$(BF).

Or $J \in (LD)$ et $J \in (BF)$

donc (JB)$\perp$(JL)

Le triangle BJL est donc rectangle en J.

K appartient au cercle de diamètre [BL]

D’après la réciproque de la propriété de l’angle droit,

$\widehat{BKL}$ =90° donc le triangle BKL est rectangle en K.

5) BKL est un triangle rectangle en K donc (BK)$\perp$(KL).

De plus, (JB)$\perp$(JL)

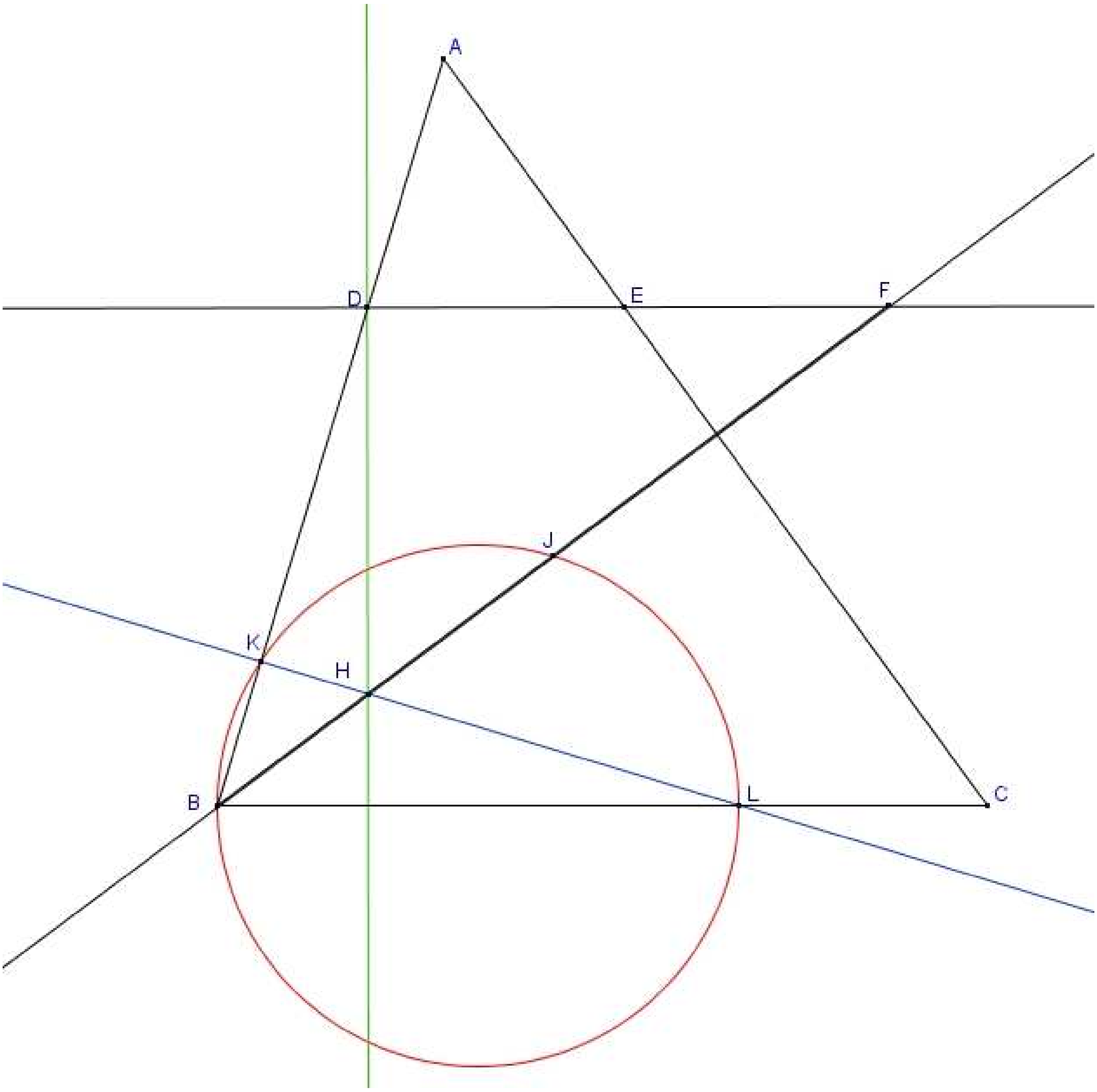
Dans le triangle DLB, (BJ) est donc la hauteur issue de B et (LK) la hauteur issue de L.

Ces 2 hauteurs sont concourantes en H.

On en déduit que (DH) est la hauteur issue de D dans le triangle DLB.

Or la hauteur d’un triangle est la droite qui passe par un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

donc (DH)$\perp$(BL)



R.Flouret