Exercice 1 :

Résoudre dans R l'équation (E) : $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$

Exercice 2 :

Résoudre dans R les équations : $\frac{1}{x+2} = \frac{-x}{x^2-4}$; $\frac{2x+3}{5x-1} = 2$; $\frac{3}{x} = \frac{x}{5}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$

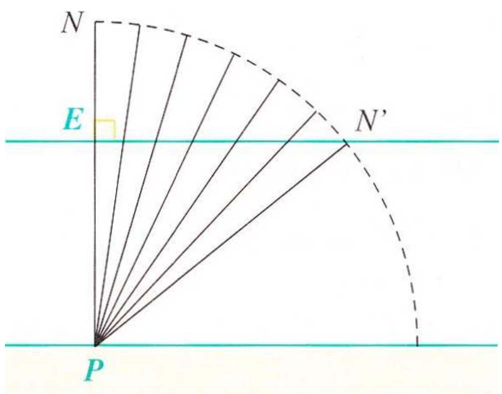
Exercice 3 :

Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés vaut 15125

Exercice 4 :

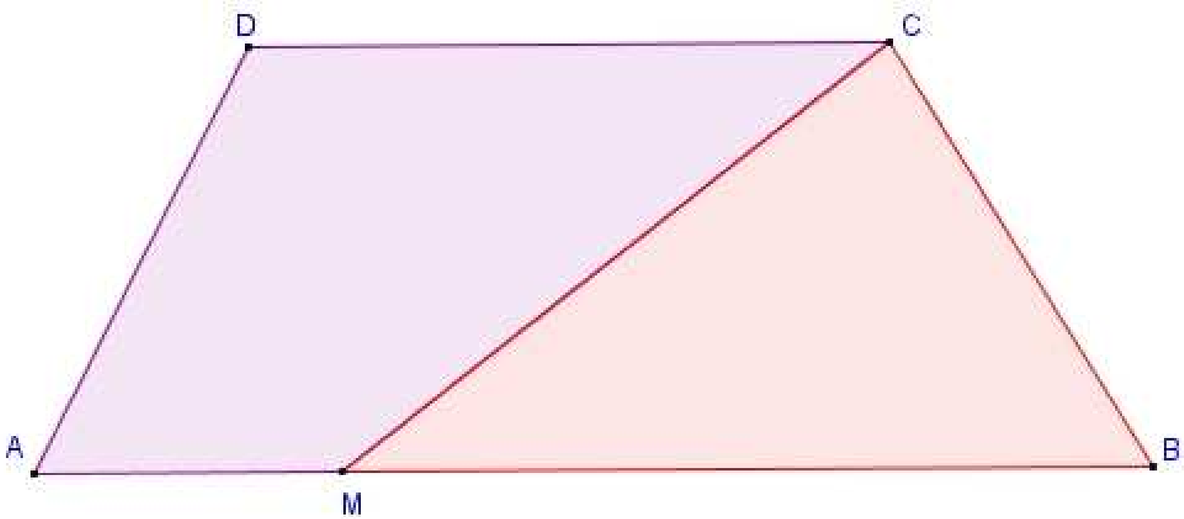
Un nénuphar se trouve à 10cm au-dessus de la surface de l'eau. Si on le tire de côté, il disparait à 21cm de l'endroit où il se trouvait. Quelle est la profondeur de l'eau ?

Modélisation : Le nénuphar décrit un arc de cercle de centre P (Pied du nénuphar) et de rayon égale à la longueur de la tige du nénuphar, pour disparaître en N' à 21 cm du point E.



Exercice 5 :

La droite (CM) partage le trapèze ABCD en deux parties d'aires égales. Calculer AM sachant que $AB = 40cm$ et $CD = 28cm$



Corrigé 1 :

$$
\begin{aligned}
(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1 &\Leftrightarrow (2x-1)^2 - x(2x-1) = (2x-1)(2x+1) \\
&\Leftrightarrow (2x-1)^2 - x(2x-1) - (2x-1)(2x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\mathrm{x}-1)(2x-1-x-2x-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\mathrm{x}-1)(-\mathrm{x}-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad -\mathrm{x}-2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{x} = -2
\end{aligned}
$$

On a donc $S = \left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

Corrigé 2 :

Pour la première équation, il faut $x \neq -2$ et $x \neq 2$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+2} = \frac{-x}{x^2-4} &\Leftrightarrow x^2 - 4 = -x(x+2) \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = -x(x+2) \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + x(x+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mathrm{x}+2)(x-2+x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)(2x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{x}+2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{x}-2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{x} = 1
\end{aligned}
$$

On a donc $S = \{1\}$

Pour la deuxième équation, il faut $x \neq \frac{1}{5}$

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+3}{5x-1} = 2 &\Leftrightarrow 2x+3 = 2(5x-1) \\
&\Leftrightarrow 2\mathrm{x}+3 = 10\mathrm{x} - 2 \\
&\Leftrightarrow 8x = 5 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

On a donc $S = \left\{\frac{5}{8}\right\}$

Pour la troisième équation, il faut $x \neq 0$

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x^2 = 3\times 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 15$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{15} \text{ ou } x = -\sqrt{15}$$

On a donc $S = \left\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\right\}$

Pour la quatrième équation, il faut $x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-2x(x+1)}{x(x+1)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Corrigé 3 :

Soit x un entier. $x-1, x$ et $x+1$ sont donc trois entiers consécutifs.

On veut donc : $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 15125$

Or $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + 2$

On est donc ramené à résoudre $3x^2 + 2 = 15125$

$$3x^2 + 2 = 15125 \Leftrightarrow 3x^2 = 15123$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 5041$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5041} = 71 \text{ ou } x = -\sqrt{5041} = -71$$

On peut donc prendre par exemple les trois entiers consécutifs 70,71 et 72 et on a bien $70^2 + 71^2 + 72^2 = 15125$

Corrigé 4 :

Soit h la hauteur de l'eau. On a donc $h = PE$

On au aussi $PN' = PN = PE + EN = h + 10$ et $EN' = 21$
Le triangle EPN' est rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PN'^2 = EP^2 + EN'^2$$
$$(h+10)^2 = h^2 + 21^2$$
$$h^2 + 20h + 100 = h^2 + 441$$
$$20h = 341$$
$$h = \frac{341}{20} = 17{,}05$$

La hauteur de l'eau est de 17,05cm.

Corrigé 5 :

Soit h la hauteur du trapèze. On a $A_{AMCD} = \frac{(DC + AM) \times h}{2}$ et $A_{MBC} = \frac{MB \times h}{2}$

Or $A_{AMCD} = A_{MBC}$ donc $\frac{(DC + AM) \times h}{2} = \frac{MB \times h}{2}$.
On en déduit donc que $CD + AM = MB$ (1)
Or $M \in [AB]$ donc $AM + MB = AB$ d'où $MB = AB - AM$

D'après (1), on a $CD + AM = AB - AM$. Ainsi, $2AM = AB - CD$ donc $AM = \frac{AB - CD}{2} = \frac{40 - 28}{2} = 6cm$