Triangle équilatéral et nombres complexes

Enoncé : Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.

Montrer que : ABC est un triangle est équilatéral $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$

Preuve :

Rappel :

- $j=e^{\left(\frac{2i\pi}{3}\right)}$
- $1+j+j^2=0$ (1)

Nous allons démontrer dans un premier temps que : ABC est un triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow a+bj+cj^2=0$

- ABC est un triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow$ la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie C sur A.

On en déduit donc que $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{i\pi}{3}}=-j^2$. En utilisant la relation (1), on en déduit facilement le résultat.

- De la même manière, nous montrons que : ABC est un triangle équilatéral indirect $\Leftrightarrow a+cj+bj^2=0$

- En résumé, ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow (a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2)=0$

On obtient le résultat voulu en n'oubliant pas que $j^3=1$ et $j+j^2=-1$.

R.Flouret