Inégalité de Hölder et inégalité de Minkowski

Inégalité de Hölder : Soient a_i et b_i , $1 \leq i \leq n$ des nombres réels positifs, et deux réels p et q de $]1,+\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors on a : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Preuve :

1er cas : Les a_i et b_i sont tous nuls. Dans ce cas, le résultat est trivial.

2ième cas : On suppose que les a_i et b_i sont non nuls.

Posons $c_i = a_i^p$ et $d_i = \frac{b_i}{a_i^{p/q}}$. La fonction $x \to x^q$ étant convexe, on a : $\left(\sum \frac{c_i}{\sum c_i} d_i\right)^q \leq \sum \frac{c_i}{\sum c_i} d_i^q$, c'est-à-dire $\sum c_i d_i \leq \left(\sum c_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum c_i d_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ d'où le résultat (que l'on obtient en jouant avec l'égalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

Inégalité de Minkowski : Dans les mêmes conditions, on a $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Preuve :

1er cas : $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p = 0$. Dans ce cas, le résultat est trivial.

2ième cas : $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p \neq 0$

On a $(a_i+b_i)^p = a_i(a_i+b_i)^{p-1} + b_i(a_i+b_i)^{p-1}$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient ;

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

donc $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p \leq^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$

Or $q(p-1) = qp - q = p$ et $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ d'où le résultat.

R.Flouret