Série Harmonique

Ce document présente différentes façons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$. Pour cela, on pose $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1ère méthode :

$$H_{2n}-H_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

Comme $H_{n+1}-H_n=\frac{1}{n+1}>0$, on en déduit que la suite (H_n) est croissante.

Supposons que (H_n) converge vers l. On aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty}H_{2n}-H_n=l-l=0$ et $H_{2n}-H_n=\frac{1}{2}$ Absurde !

On en déduit que (H_n) diverge. Comme elle est croissante, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$

2ième méthode :

On utilise l'inégalité classique :

$\forall x\geq 0, \ln(1+x)\leq x$.

On a donc $\ln(1+\frac{1}{k})\leq\frac{1}{k}$. Or $\ln(1+\frac{1}{k})=\ln(k+1)-\ln(k)$

On en déduit par sommation et téléscopage que $\ln(n+1)\leq H_n$. Par passage à la limite, on obtient le résultat.

3ième méthode :

$\forall t\in[k;k+1]$, on a $k\leq t\leq k+1$ donc $\frac{1}{t}\leq\frac{1}{k}\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k}$.

On en déduit par sommation que $\int_1^{n+1}\frac{1}{t}dt\leq H_n$ d'où $\ln(n+1)\leq H_n$ puis le résultat par passage à la limite.

4ième méthode :

On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur [k;k+1] pour obtenir : $\frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$. Par sommation, tèlèscopage et changement d'indice (ce sera tout !) on en déduit que $H_n+\frac{1}{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq H_n$. Par passage à la limite, on en déduit le résultat voulu.

5ième méthode :

C'est une série de Riemann. Elle est divergente. En effet, $\sum\frac{1}{k^\alpha}$ diverge pour $\alpha\leq 1$

R.Flouret