Sous-groupe de R

Théorème : Tout sous-groupe de (R,+) est soit dense soit discret

Preuve :

Soit (G,+) un sous-groupe de (R,+)

Le sous-groupe réduit à {0} est discret : {0}=0Z

Supposons $G \neq \{0\}$. Alors $\exists g \in G / g \neq 0$.
Considérons $A = G \cap R_+^* = \{g \in G / g > 0\}$

Si $g > 0$, alors $G \cap R_+^* \neq \emptyset$
Si $g < 0$, alors $-g > 0$ et $G \cap R_+^* \neq \emptyset$.

On en déduit donc que $G \cap R_+^*$ est non vide et minoré par 0.

Soit a=inf A.
Deux cas se présentent :

1er cas : $a > 0$

Par l'absurde, supposons que $a \notin A$. On a $2a > a > 0$. 2a n'est donc pas un minorant de A donc $\exists x \in A / a < x < 2a$.
x n'est donc pas un minorant de A donc $\exists y \in A / 0 < a < y < x < 2a$ d'où $0 < x - y < 2a - y < a$
G étant un sous groupe additif, on en déduit que $x - y \in A$.
L'inégalité $0 < x - y < a$ est donc absurde !

Pour la suite, nous pouvons donc supposer $a \in A$ et donc $a \in G$.

Montrons que $aZ \subset G$.
Si $n = 0$, alors on a clairement $0a = 0 \in G$. Soit $n \in Z^*$.
Si $n > 0$ alors $na = a + ... + a \in G$ car G sous-groupe additif.
Si $n < 0$ alors $na = |n| \times (-a) = \underbrace{(-a) + ... + (-a)}_{|n| \, fois} \in G$ car G sous-groupe additif et $(-a) \in G$ en tant qu'opposé de $a \in G$.

Montrons que $G \subset aZ$.
Soit $x \in G$ et $n = E(\frac{x}{a})$. On a $E(\frac{x}{a}) \leq \frac{x}{a} < E(\frac{x}{a}) + 1$ d'où $an \leq x < a(n+1)$. On en déduit que $0 \leq x - an < a$.
G étant un sous-groupe additif, on a $x - an \in G$.
Si $x \neq an$, alors $0 < x - an < a$ donc $x - an \in A$. Absurde par définition de a.

On a donc $x = an \in aZ$ puis $G \subset aZ$.

Finalement, $G = aZ$.

R.Flouret

2ième cas : $a = 0$

Soit $(x, y) \in R^2, x < y$. $\exists \eta \in A / 0 < \eta < y - x$.

Posons $p = E(\frac{x}{\eta})$. On a donc $p \le \frac{x}{\eta} < p + 1$ d'où $p\eta \le x < \eta(p+1) \le x + \eta < y$

Or $\eta(p+1) \in G$ car G sous-groupe additif donc G est dense dans R.

Application :

Soit $\alpha \notin \pi Q$. Montrer que $\alpha Z + 2\pi Z$ est un sous-groupe dense dans R.

Corrigé :

Les sous-groupes additifs de R sont denses dans R ou de la forme aZ.

Supposons que $\alpha Z + 2\pi Z$ soit de la forme $aZ, a \in R$. $\exists (k, k') \in Z^2 / 2\pi = ak$ et $\alpha = ak'$.

On en déduit que $\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{k}{k'} \in Q$. Absurde car $\alpha \notin \pi Q$.

$\alpha Z + 2\pi Z$ est donc un sous-groupe dense dans R.