Sous-groupe de Z

Théorème : Pour tout sous-groupe H de Z, il existe un unique entier naturel n tel que H=nZ.

Preuve :

a) Existence :

Il est clair que (nZ,+) est un sous-groupe de (Z,+)

Soit (H,+) un sous-groupe de (Z,+).

Si H={0}, H est bien de la forme nZ avec n=0.

Si $H \neq \{0\}$ alors $\exists h \in H / h \neq 0$

Considérons $H \cap N^* = \{h \in H / h > 0\}$

Si $h > 0$, alors $H \cap N^* \neq \emptyset$
Si $h < 0$, alors $-h > 0$ et $H \cap N^* \neq \emptyset$

On en déduit donc que $H \cap N^*$ est une partie non vide de N^*. Elle admet donc un plus petit élément que l'on note n.

Montrons que H=nZ.

Puisque $n \in H$, il est clair que $nZ \subset H$.

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $h \in H$. Effectuons la division euclidienne de h par n.
$\exists (q,r) \in Z^2 / h = nq + r, 0 \leq r < n$

On a donc $r = h - nq, 0 \leq r < n$

Supposons que $r \neq 0$. On a donc $r > 0$ puis $r \in N^*$. Mais on a aussi $r \in H$.

On a donc $r \in H \cap N^*$. Nous avons donc $r \geq n$ et $r < n$.

Absurde !

Par suite, $r = 0$ et $h = nq$ .Nous avons donc $h \in nZ$ puis $H \subset nZ$

Bilan : $H = nZ$

R.Flouret

b) Unicité :

Soit n et m 2 entiers naturels. Supposons que nZ=mZ. On a donc $nZ \subset mZ \Rightarrow m/n$ (ralenti)

Aussi, $mZ \subset nZ \Rightarrow n/m$. On en déduit donc que n=m car la relation divise est antisymétrique sur N. L'unicité est donc acquise.

Ralenti : On se sert de la proposition suivante :
$a/b \Leftrightarrow bZ \subset aZ$

Preuve : $(\Rightarrow)$ $a/b \Rightarrow \exists q \in Z / b = aq \Rightarrow \forall c \in Z, bc = a(qc) \Rightarrow bZ \subset aZ$
$(\Leftarrow)$ $bZ \subset aZ \Rightarrow b \in aZ \Rightarrow \exists q \in Z / b = aq \Rightarrow a/b$