

Rationalité et carré parfait

But : Soit b un entier naturel. Montrer que \sqrt{b} est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.

Preuve :

(\Leftarrow) Si $b \in \mathbb{N}^2$ alors $\sqrt{b} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

(\Rightarrow) Si $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ alors $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}, \mathbb{N}^*) / \sqrt{b} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

On en déduit que $q^2 b = p^2$ donc $q^2 \mid p^2$.

Comme $\text{pgcd}(p^2, q^2) = 1$, on en déduit que $q = 1$ et par suite, $b = p^2 \in \mathbb{N}^2$