La racine d'un nombre premier est irrationel

Raisonnons par l'absurde :

Soit p un nombre premier. Supposons que $\sqrt{p}$ soit rationnel. Alors, $\exists(m,n)\in(Z,N^*)/\sqrt{p}=\frac{m}{n}$ avec $p\gcd(m,n)=1$

On a alors $\sqrt{p}n=m$ puis $pn^2=m^2$ donc p/m^2 et donc p/m (Ralenti)

m s'écrit donc m = pm' avec $m'\in Z$ d'où $pn^2=m'^2p^2$ soit $n^2=pm'^2$.

On a donc p/n^2 puis p/n

Bilan : p/m et p/n donc $p/p\gcd(m,n)\Rightarrow p/1$

Absurde !

Conclusion : $\sqrt{p}$ est irrationel

Ralenti : On se sert de la proposition suivante :

Si p est premier, alors p/ab => p/a ou p/b.

En effet, si p ne divise pas a, alors p est premier avec a donc p divise b par le théorème de Gauss.

R.Flouret